

SINUS – RP

Anregungen und Vorschläge für Lernzirkel und offene Aufgaben zum Thema "Zahlen"

aus den Zahlbereichen

- Natürliche Zahlen
- Ganze Zahlen
- Bruchzahlen
- Rationale Zahlen



Diese Veröffentlichung wurde im Rahmen des Programms SINUS-RP Rheinland-Pfalz erstellt.

Für die dargestellten Sachverhalte und Schlussfolgerungen zeichnen die jeweiligen Autorinnen und Autoren verantwortlich.

Herausgeber:

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur

Autoren:

Die Broschüre wurde von folgende Setkoordinatorinnen und –koordinatoren des SINUS-Projekts zusammengestellt. Die für die einzelnen Kapitel Verantwortlichen sind an entsprechender Stelle in den "Hinweisen für Lehrkräfte" genannt.

Friederike Beran, Landau

Armin Baeger, Münstermaifeld

Ursula Bicker, Bad Kreuznach

Stephan Damp, Ingelheim

Ralf Früholz, Mainz

Volkhardt Fuhrmann, Worms

Franz-Josef Göbel, Cochem

Christine Hahn, Worms

Ottmar Hofmann, Hermeskeil

Lucie Kluge-Jungbluth, Vallendar

Michael Lamberty, Nieder Olm

Paul Müller, Frankenthal

Petra Neymeyr, Mainz

Hellen Ossmann, Bingen

Helga Schmidt, Koborn-Gondorf

Georg Schmitt, Saarburg

Peter Staudt, Nieder Olm

Claudia Steiert, Stromberg

Jana Zienicke, Altenkirchen

Beratung:

Barbara Mathea

Ferdinand Weber

Skriptbearbeitung:

Claudia Steiert

Layout:

Rainer Schanz

Druck:

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur

Mainz

Einleitung

Diese Handreichung enthält für die Übungsphasen im Unterricht Anregungen für alle Klassenstufen der Sekundarstufe I. Inhaltlich beziehen sich die Anregungen auf Kernfragen der Zahlbereiche, die in der Sekundarstufe I schrittweise aufgebaut werden und auf Zahlbereichserweiterungen. So können die meisten Materialien sowohl in der Klassenstufe, in der ein bestimmter Zahlbereich thematisiert wird, zur Übung als auch in späteren Klassenstufen zur Festigung, etwa im Rahmen des Sicherens von Grundwissen, eingesetzt werden.

Neben dem Training und dem Festigen von Fertigkeiten auf dem Gebiet, das gerade im Unterricht behandelt wurde, sollen sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig und kreativ mit Fragestellungen beschäftigen, die nicht eng an einen bestimmten Lehrplaninhalt gebunden sind und von den üblichen Übungsformen abweichen. Dazu gehören u. a. das Lernen an Stationen, auch in Partnerarbeit, und das Beschäftigen mit so genannten offenen Aufgaben.

In diesem Sinn enthalten die im Folgenden angebotenen Lernzirkel Aufgaben, die nicht nach einem festen Schema gelöst werden, und neben den Lernzirkeln werden auch einzelne offene Aufgaben bereitgestellt.

Die Stationen in den Lernzirkeln und die offenen Aufgaben sind so ausgewählt, dass durch das Bearbeiten und Lösen die Entwicklung der in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützt wird. Insbesondere in den Lernzirkeln werden verschiedene Möglichkeiten der Differenzierung angeboten, sei es durch die Gliederung in Pflicht- und Wahl-Stationen, sei es durch die Bereitstellung unterschiedlicher Varianten einzelner Stationen.

Methodische Anregungen zu den Materialien werden im Abschnitt „Hinweise für Lehrkräfte“ gegeben (siehe 2. Teil dieser Handreichungen).

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	3
Schülerteil	5
Natürliche Zahlen.....	5
Natürliche Zahlen - Lernzirkel.....	6
Natürliche Zahlen - Offene Aufgaben.....	17
Ganze Zahlen.....	21
Ganze Zahlen - Lernzirkel.....	22
Ganze Zahlen - Offene Aufgabe.....	41
Bruchzahlen.....	43
Bruchzahlen Lernzirkel.....	44
Bruchzahlen Offene Aufgabe.....	55
Rationale Zahlen.....	57
Rationale Zahlen – Lernzirkel.....	58
Hinweise für Lehrkräfte und Lösungen	65
Einsatz der Materialien im Unterricht.....	67
Natürliche Zahlen	
Lernzirkel – Lehrerteil.....	69
Lernzirkel – Lösungen.....	72
Lernzirkel – Kompetenzen.....	79
Offene Aufgaben – Lehrerteil.....	81
Ganze Zahlen.....	85
Lernzirkel – Lehrerteil.....	86
Lernzirkel – Lösungen.....	90
Lernzirkel – Kompetenzen.....	97
Offene Aufgabe – Lehrerteil.....	99
Bruchzahlen.....	100
Lernzirkel – Lehrerteil.....	102
Lernzirkel – Lösungen.....	103
Lernzirkel – Kompetenzen.....	111
Offene Aufgabe – Lehrerteil.....	113
Rationale Zahlen.....	114
Lernzirkel – Lehrerteil.....	115
Lernzirkel – Lösungen.....	116
Lernzirkel – Kompetenzen.....	120

Zahlbereich Natürliche Zahlen

Lernzirkel

Pflicht:

Station 1: Zieh ab!

Station 2: Leg um!

Station 3: Wirf hin!

Station 4: Zieh Leine!

Station 5: Teil ein!

Station 6: Runde sinnvoll!

Station 7: Schätz ab!

Wahl:

Station 8: Summ los!

Station 9: Spiegel mich!

Lernzirkel

Thema: Natürliche Zahlen

Kontrollzettel von: _____

- Du kannst die Reihenfolge der Stationen selbst wählen.
- Du musst alle Pflichtstationen bearbeiten.
- Du darfst an einigen Stationen mit Partner (PA) arbeiten.
- Lies die Arbeitsanweisungen zu den einzelnen Stationen sorgfältig durch!
- Sorge durch Ruhe für eine angenehme Arbeitsatmosphäre!

	Station	Titel	erledigt am:	Die Aufgabe war für mich	Anzahl der Fehler
Pflicht	1 PA	Zieh ab!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	2	Leg um!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	3 PA	Wirf hin!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	4a	Zieh Leine!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	5	Teil ein!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	6	Runde sinnvoll!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	7 PA	Schätz ab!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
Wahl	8	Summ los!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	9 PA	Spiegel mich!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	

Station Nr. 1

Zieh ab!

Schreibe eine dreistellige Zahl auf.	Beispiel: 403
Ordne diese Ziffern so um, dass die Zahl möglichst groß wird.	430
Ordne sie nun so um, dass die Zahl möglichst klein wird.	034
Subtrahiere jetzt die kleinere von der größeren Zahl.	$430 - 034 = 396$
Gehe dann mit dieser Zahl genauso vor wie zuerst beschrieben.	$963 - 369 = 594$
Fahre fort, bis sich nichts mehr ändert.	

Überprüfe nun, was passiert, wenn du mit einer anderen dreistelligen Zahl beginnst. Vergleiche mit deinem Nachbarn. Was fällt euch auf? Notiert alle eure Beobachtungen.

Station Nr. 2

Leg um!

Schneide die 5 Zahlenkärtchen aus!

Lege sie nun alle so hintereinander, dass die größtmögliche Zahl entsteht und klebe sie in dieser Reihenfolge auf.

Schreibe den Zahlenwert als Wort darunter!

13	4	209	6	59
----	---	-----	---	----

Station Nr. 3

Wirf hin!

Wer schafft die **kleinste** Zahl?

Spielanleitung:

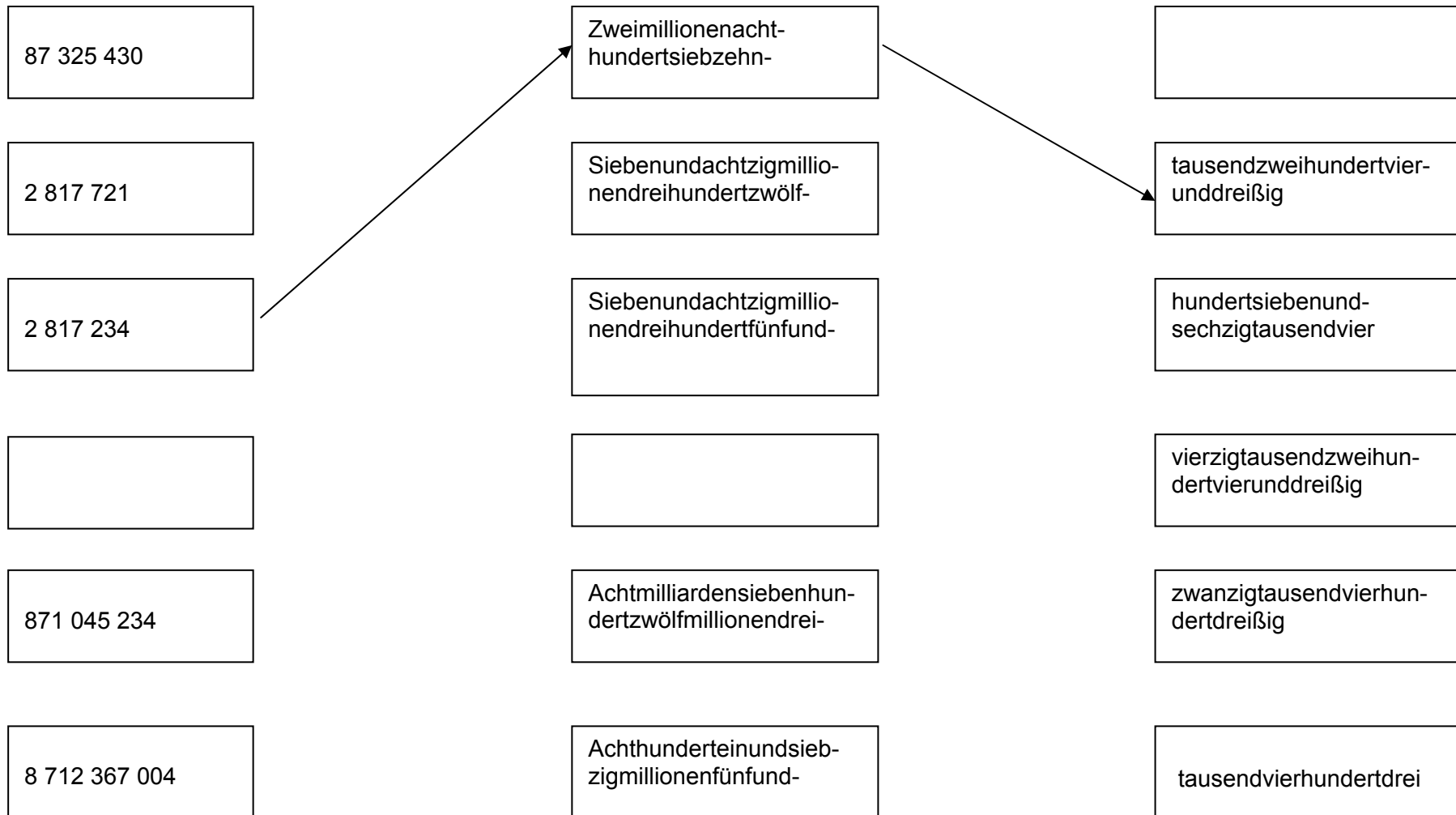
- Würfelt dreimal abwechselnd. Der jüngste Spieler (Spieler 1) beginnt.
- Tragt nach jedem Wurf die gewürfelte Zahl direkt in die Stellentafel ein. Beachtet, dass am Ende die entstandene dreistellige Zahl möglichst klein sein soll.
- Wer nach drei Würfeln die kleinste Zahl erreicht hat, bekommt einen Siegpunkt.
- Spielt drei Runden.

Runde	Spieler	H	Z	E	Siegpunkt
1	1				
	2				
2	1				
	2				
3	1				
	2				

Station Nr. 4a

Zieh Leine!

Vervollständige!



Station Nr. 4b

Zieh Leine!

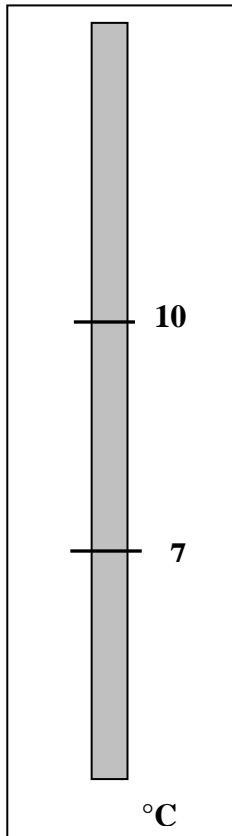
178 210 271	Zweimillionenachthundertsieb-zehntausendsiebenhundertein-undzwanzig
2 817 234	Siebenundachtzigmillionendrei-hundertfünfundzwanzig-tausendvierhunderdreißig
87 312 403	Einhundertachtundsiebzigmil-lionenzweihundertzehntau-senzweihunderteinundsiebzig
1 263 012	Achtmilliardensiebenhundert-zwölfmillionendreihundertsie-ben-undsechzigtausendundvier
2 817 721	Achthunderteinundsiebzig-millionenfünfundvierzigtausend-zweihundertvierunddreißig
8 712 367 004	Einemillionzweihundertdreiund-sechzigtausendundzwölf
871 045 234	Siebenundachtzigmillionen-dreihundertundwölftausend-vierhundertdrei
28 987 210	Zweimillionenachthundertsieb-zehntausendsiebenhundertein-undzwanzig

Station Nr. 5

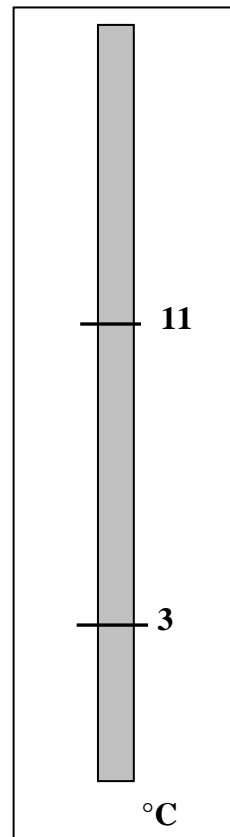
Teil ein!

1. Die abgebildeten Thermometerskalen sind unvollständig beschriftet. Ergänze alle fehlenden ganzzahligen Markierungen und Werte so genau wie möglich.

a)

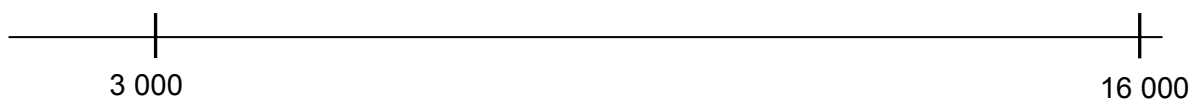


b)



2. Wo ist die 10 000 auf dem Ausschnitt des Zahlenstrahls?

Markiere so genau wie möglich.



Station Nr. 6

Runde sinnvoll!

a) Ist Runden hier sinnvoll? Begründe deine Entscheidung.

	Ja	Nein
Der VfL Wolfsburg wurde in der Saison 2008/09 mit 69 Punkten und 80:41 Toren nach 34 Spielen deutscher Fußballmeister.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Andorra hat 83 137 Einwohner.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Der Rhein ist 1 324 km lang.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Bis zum 18.06.09 sind 1 617 827 Anträge zum „Abwracken“ eines PKW eingegangen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

b) Stelle die Einwohnerzahlen folgender Städte in Rheinland-Pfalz in einem Balkendiagramm dar! Runde vorher sinnvoll.

Mainz	196 425
Ludwigshafen	163 560
Koblenz	105 888
Trier	103 518
Kaiserslautern	98 044
Worms	82 212

Station Nr. 7

Schätz ab!

Wie lang sind alle Finger der Schülerinnen und Schüler in unserer Klasse / unserer Schule zusammen?

Station Nr. 8

Summ los!

Die **Quersumme** einer Zahl ist die Summe aller Ziffern, aus denen die Zahl aufgebaut ist.

So hat z.B. die Zahl 805 die Quersumme $8 + 0 + 5 = 13$.

Welchen Wert hat die Summe der Quersummen aller Zahlen von 1 bis 1000?

Station Nr. 9

Spiegel mich!

Du kannst **OTTO** von hinten und von vorne lesen – es ist gleich.

Ebenso gibt es Zahlen, die - von hinten oder vorne gelesen - gleich sind, z.B. 252 oder 3663.

Man nennt solche Zahlen **Palindrome** (Spiegelzahlen).

1. Wie viele dreistellige Palindrome gibt es?

2. Wie viele davon sind Quadratzahlen?

Zahlbereich Natürliche Zahlen

Offene Aufgaben

1. Fünf mal fünf
2. Restposten gefällig?
3. Wieg schlau!

*Verantwortlich für die Offenen Aufgaben:
Friederike Beran, Volkhardt Fuhrmann, Christine Hahn, Paul Müller*

Fünf mal fünf

$$(55 : 55) + 5 = 6$$
$$(55 - 5 \cdot 5) : 5 = 6$$

Die Zahl 6 wurde in beiden Beispielen jeweils mit 5 mal der Ziffer 5 dargestellt. Zum Verknüpfen dürfen alle Rechenzeichen (+ , - , · , :) sowie Klammern benutzt werden.

1. Gibt es noch andere Möglichkeiten mit 5 mal der Ziffer 5 die 6 darzustellen?
2. Gibt es auch entsprechende Darstellungen mit 5 mal der Ziffer 5 für die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 und 0 ?

Restposten gefällig?

Die schlaue Susi meint:

„Wenn ich eine natürliche Zahl durch 5 dividiere und sich dann der Rest 3 ergibt, dann hat das Quadrat dieser Zahl nach der Division durch 5 den Rest 4.“

Paul rechnet nach:

„18 ergibt bei der Division durch 5 den Rest 3 und 18^2 ist 324. 324 hat bei der Division durch 5 den Rest 4 – du hast Recht!“

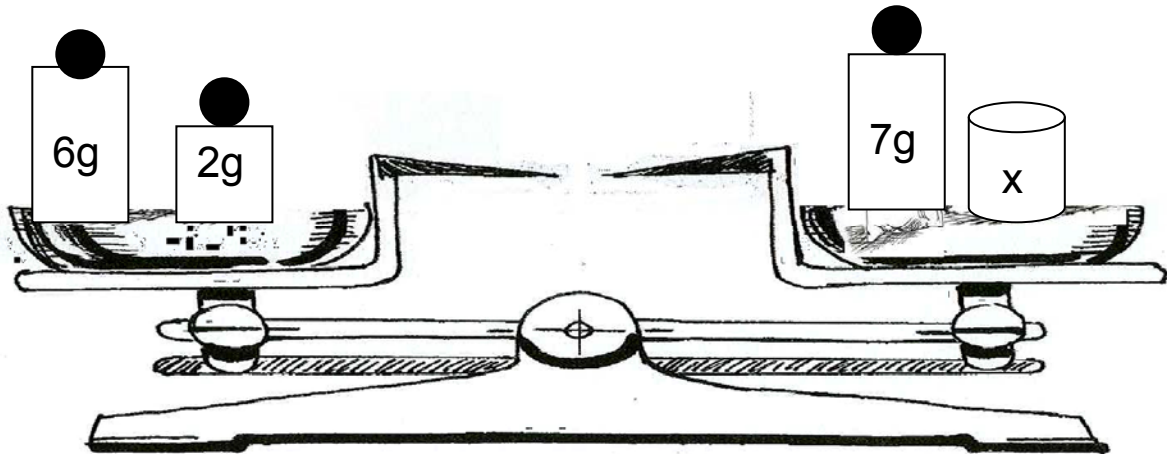
Stimmt Susis Behauptung wirklich immer?

Begründe!

Wieg schlau!

Schon mit wenigen Gewichten kann man relativ viele Mengen abwiegen, wenn man die Gewichte auf beide Waagschalen geschickt verteilt.

1. Kann man mit der Balkenwaage 1g, 2g, 3g, ... ,15g abwiegen, wenn nur die 3 abgebildeten Gewichte zur Verfügung stehen?



Zu wiegen (x)	Linke Waagschale		Rechte Waagschale
1g		▲	
2g		▲	
3g		▲	
4g		▲	
5g		▲	
6g		▲	
7g		▲	
8g		▲	
9g		▲	
10g		▲	
11g		▲	
12g		▲	
13g		▲	
14g		▲	
15g		▲	

2. Finde zu dem Gewichtssatz mit 2g, 6g und 7g noch ein viertes Gewicht, damit du möglichst weit - und lückenlos - wiegen kannst. Beschreibe deinen Lösungsweg!

Zahlbereich Ganze Zahlen

Lernzirkel

Pflicht:

Station 1: Das magische Kreuz

Station 2: Temperaturen über und unter 0°C

Station 3: Punkte im Koordinatensystem

Station 4: Besuch aus dem Weltraum

Station 5: Baumarkt Kachelturm

Station 6: 1, 2, 3, 4 natürliche Zahlen

Station 7: Mathemagie

Wahl:

Station 8: Spirale

Station 9: Beratung im Elektrogeschäft

Station 10: Punkte im Koordinatensystem

Station 11: Achtung geheim!

Station 12: Die gesuchte Zahl

Station 13: Bekannte Seen auf der Erde

Lernzirkel

Thema: Ganze Zahlen

Kontrollzettel von: _____

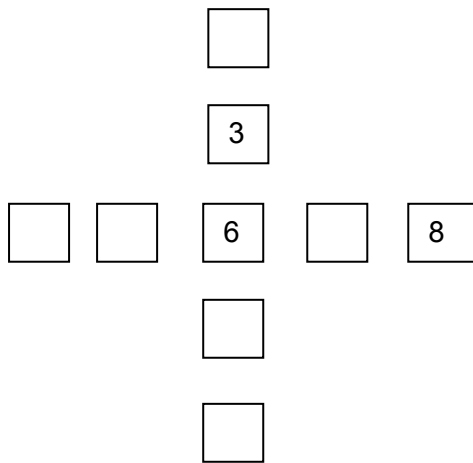
- Du kannst die Reihenfolge der Stationen selbst wählen.
- Du musst alle Pflichtstationen bearbeiten.
- Du darfst an einigen Stationen mit Partner (PA) arbeiten.
- Lies die Arbeitsanweisungen zu den einzelnen Stationen sorgfältig durch!
- Sorge durch Ruhe für eine angenehme Arbeitsatmosphäre!

	Station	Titel	erledigt am:	Die Aufgabe war für mich	Anzahl der Fehler
Pflicht	1	Das magische Kreuz		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	2	Temperaturen über und unter 0° C		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	3	Punkte im Koordinatensystem		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	4	Besuch aus dem Weltraum		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	5 PA	Baumarkt Kachelturm		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	6 PA	1, 2, 3, 4 natürliche Zahlen		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	7	Mathemagie		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
Wahl	8	Spirale		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	9	Beratung im Elektrogeschäft		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	10	Punkte im Koordinatensystem		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	11	Achtung geheim!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	12	Die gesuchte Zahl		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	13 PA	Bekannte Seen auf der Erde		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	

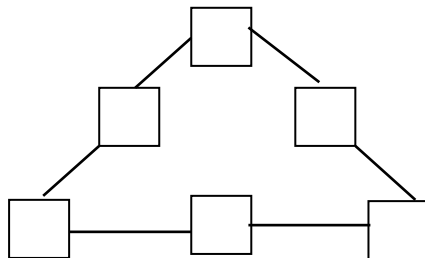
Station Nr. 1

Das Magische Kreuz

Beim magischen Kreuz ist die Summe der waagerechten und der senkrechten Zahlenreihe gleich. Jede verwendete Zahl kommt nur einmal vor.



1. Ergänze die Abbildung zu einem magischen Kreuz.
Verwende dazu die Zahlen $-2, -3, -4, -5, -6, 7$
2. Bilde ein magisches Kreuz mit den Zahlen $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
3. Beim magischen Dreieck ist die Summe der Zahlen auf jeder Dreieckseite gleich.



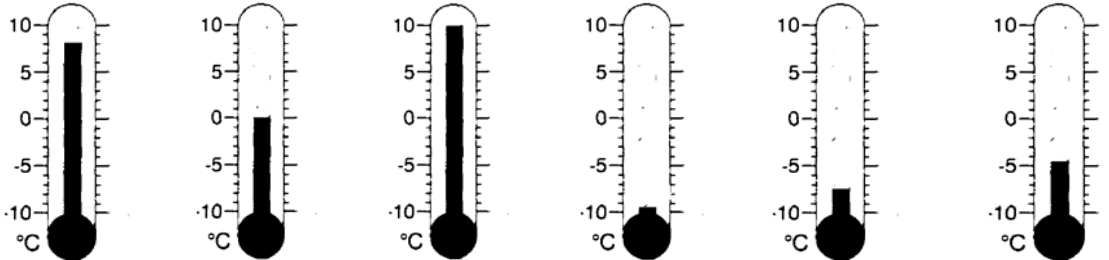
Bilde ein magisches Dreieck mit den Zahlen $-3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Station Nr. 2

Temperaturen über und unter 0° C

In fünf verschiedenen europäischen Städten werden folgende Temperaturen angezeigt:

Hamburg: **London:** **Madrid:** **Moskau:** **Stockholm:** **Warschau:**



1) Schreibe die Temperaturen auf!

2) Ordne die Temperaturen der Größe nach!

< < < < <

3) Trage die Temperaturunterschiede zwischen den Orten in die Tabelle ein!

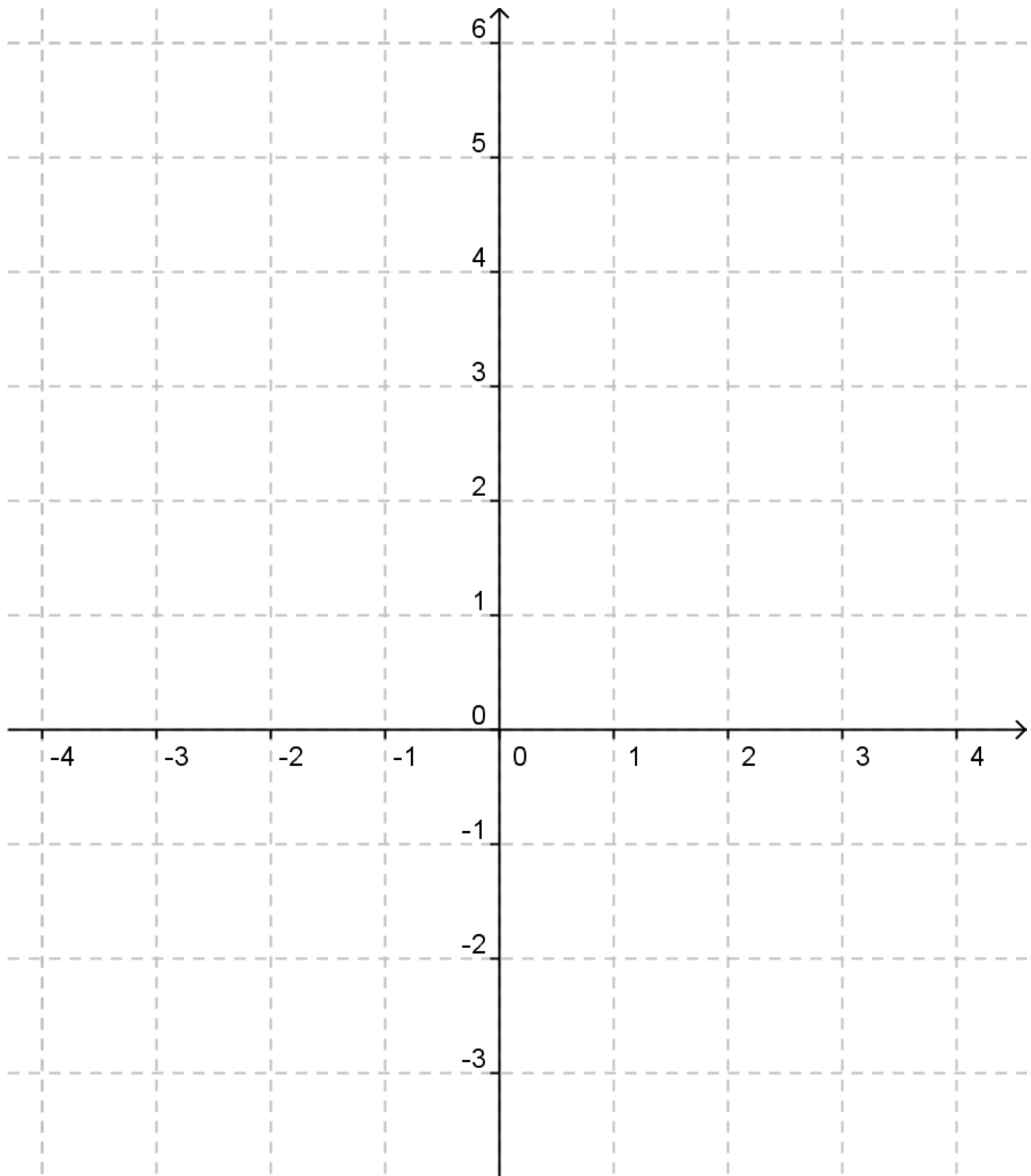
Temperaturunterschiede zwischen	Stockholm	Hamburg	Warschau	London
Madrid				
Moskau				

Station Nr. 3

Punkte im Koordinatensystem

Trage die Punkte A (-1 / -2), B (+1 / -2), C (-1 / +2), D (+1 / +2), E (0 / +4) in das Koordinatensystem ein und verbinde die Punkte in folgender Reihenfolge: A, B, C, D, E, C, A, D, B.

Du erhältst eine mögliche Lösung für das „Haus vom Nikolaus“:



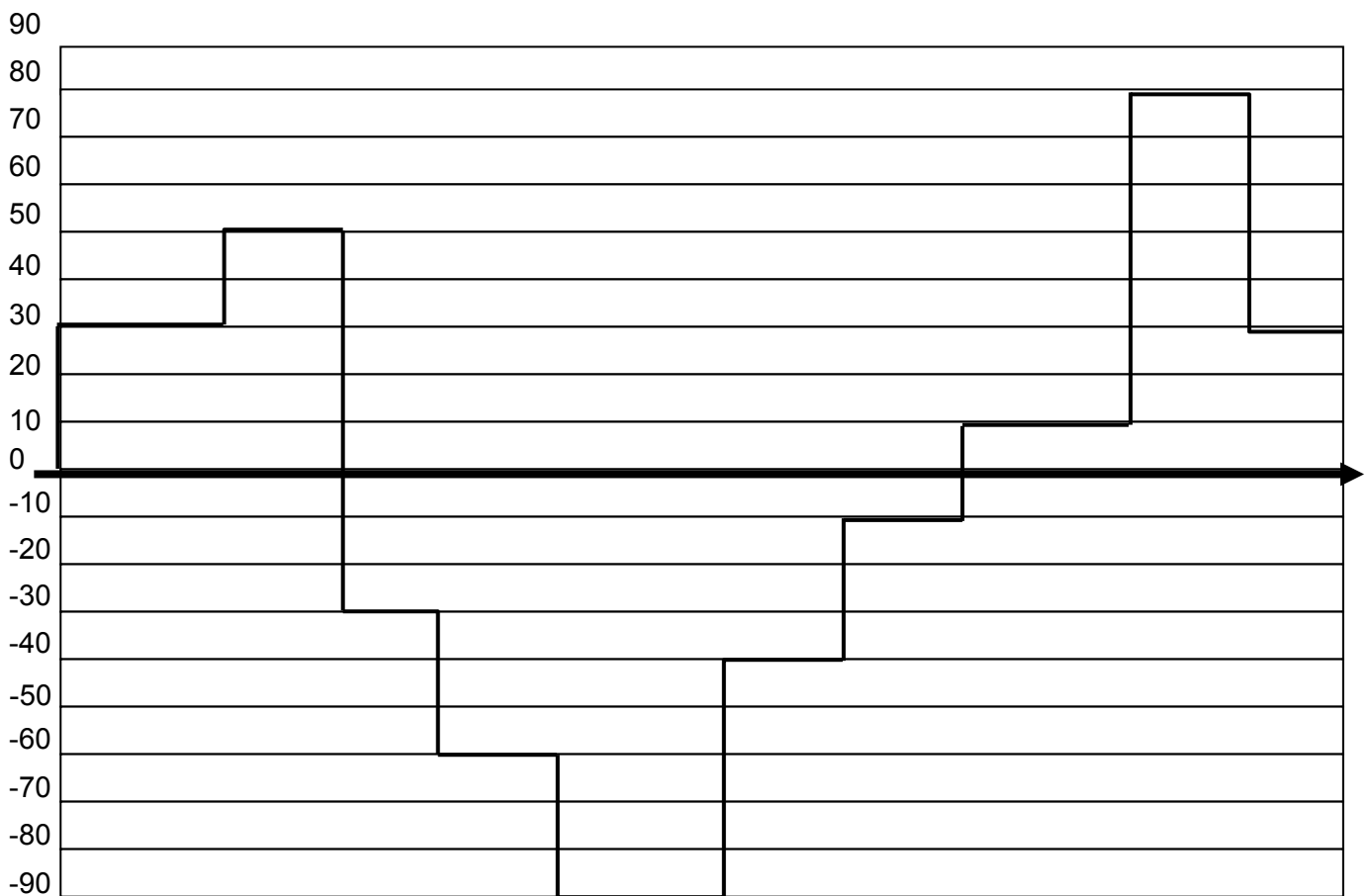
Station Nr. 4

Besuch aus dem Weltraum

Die Erde erhält Besuch aus dem Weltraum. Die außerirdischen Wesen sitzen in Raumschiffen, die nahezu mit Lichtgeschwindigkeit aufsteigen und absinken können. Die Besucher wollen die Erde aus möglichst geringer Höhe erkunden und müssen deswegen ihr Raumschiff entsprechend der Berge und Täler immer wieder nach oben und nach unten steuern.

Sie beginnen in der Höhe 0.

Aufgabe: Welche Anweisungen zum Steigen und Absinken muss man erteilen, wenn man das angegebene Profil fliegen will?



Station Nr. 5

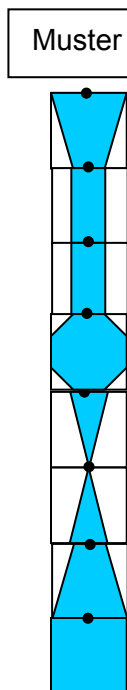
Baumarkt Kachelturm

Im Baumarkt Kachelturm kannst Du in jedem Stockwerk Kacheln mit nur einem bestimmten Aufdruck kaufen. Bei einem Besuch in dem Stockwerk darfst Du immer nur eine Kachel in den Aufzug tragen.

Du betrittst das Kaufhaus im Erdgeschoss (Stockwerk 0). Notiere, in welchem Stockwerk Du eine Kachel mit dem passenden Aufdruck findest und wie viele Stockwerke Du jeweils nach oben (+) bzw. nach unten (-) fahren musst, um die nächstgesuchte Kachel zu erhalten! (Beachte auch den schwarzen Punkt!)

Baumarkt Kachelturm	
Stock	Aufdruck
5	
4	
3	
2	
11	
0	
-1	
-2	
-3	
-4	
-5	
-6	

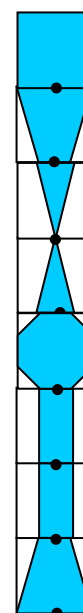
Beispiel:



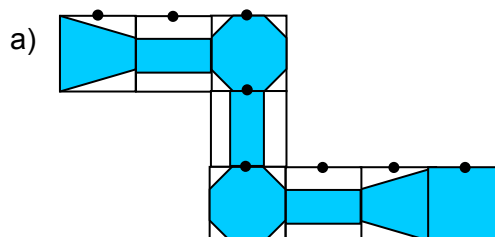
Einkaufszettel	
Stock	Fahrt
0	
-2	-2
-1	+1
-1	0
0	+1
5	+5
4	-1
-5	-9
-6	-1

Du steigst im Erdgeschoss in den Aufzug ein!

b)

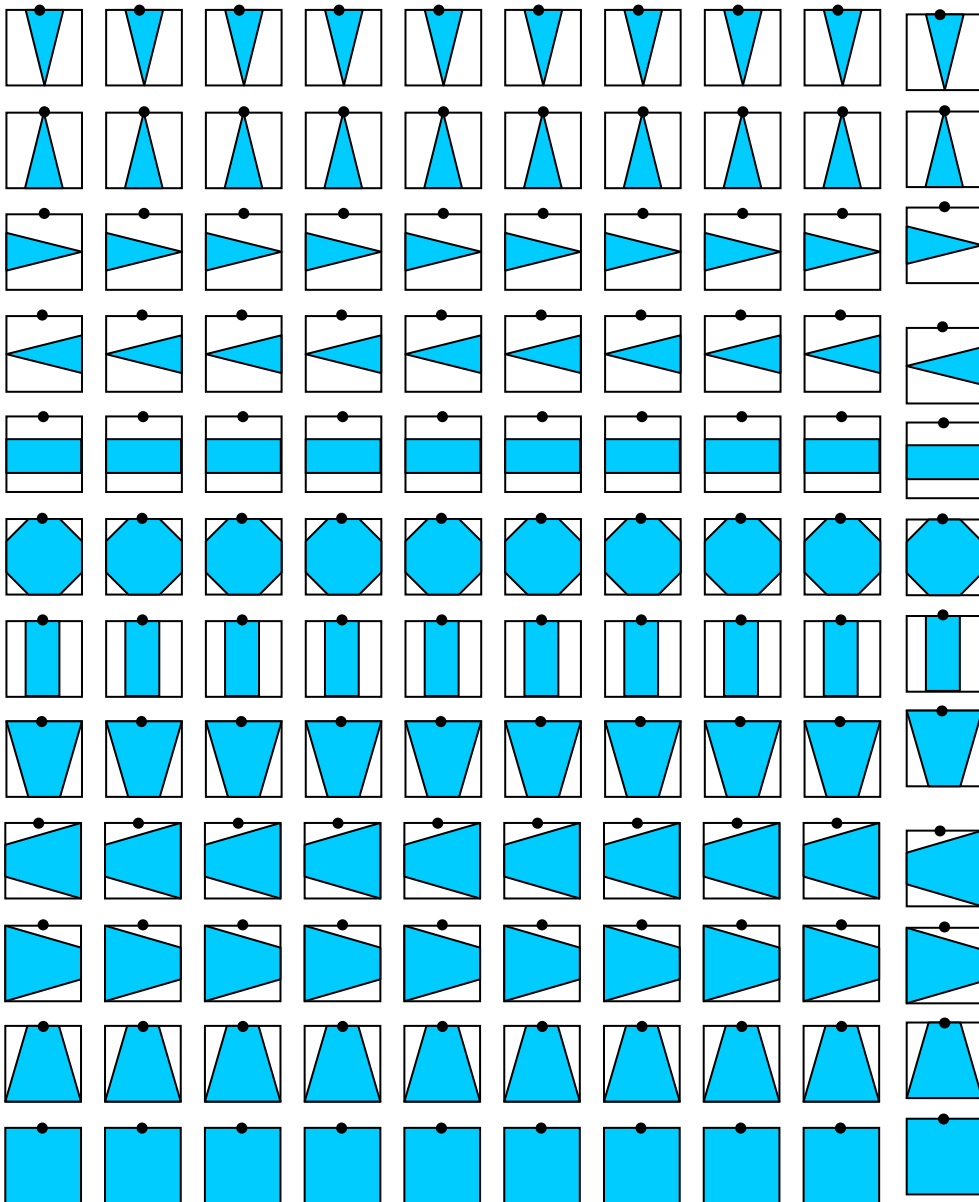


Aufgabe: Gehe die Kacheln für die nachfolgenden Muster a) und b) einkaufen und erstelle einen Einkaufszettel nach obigem Beispiel!



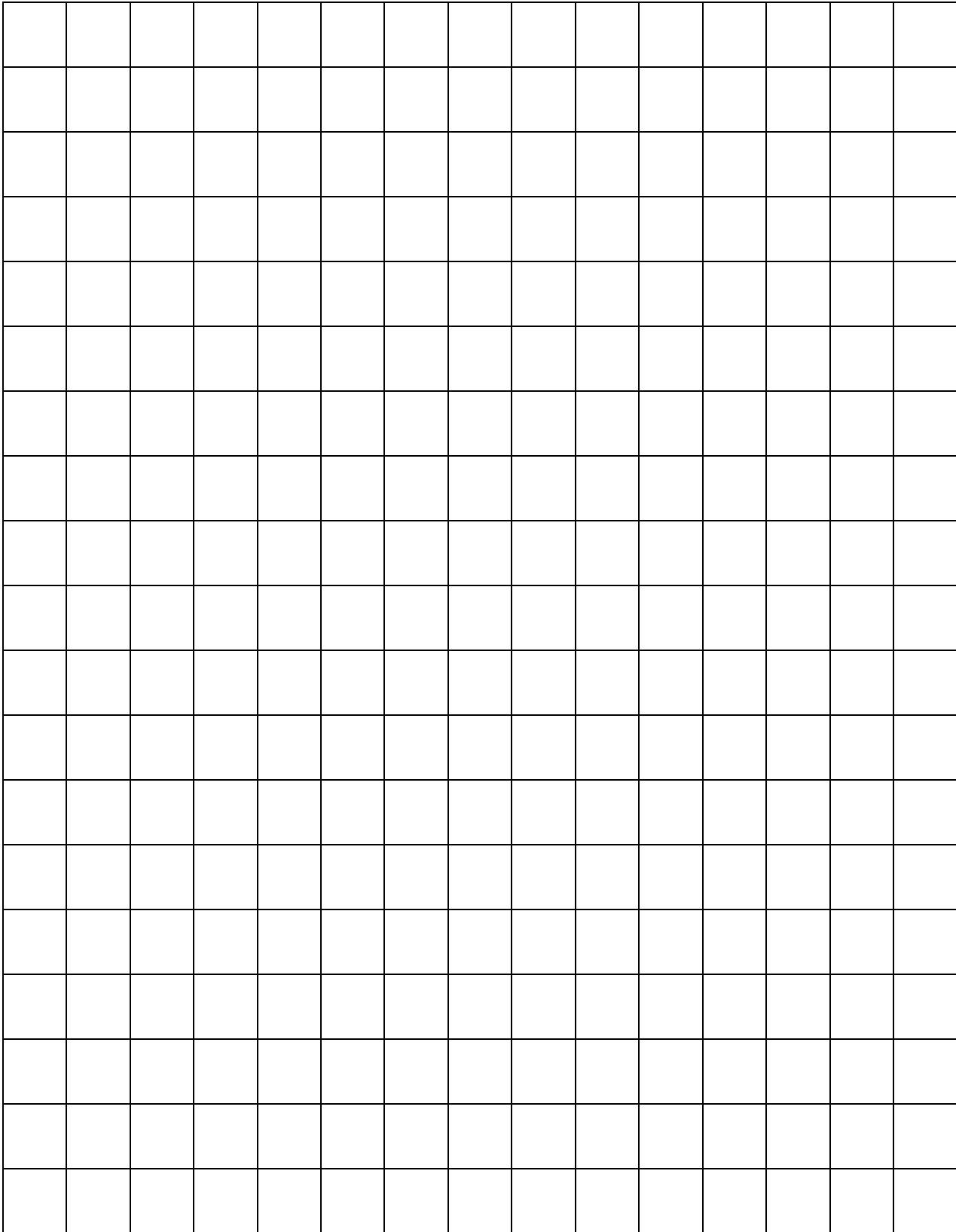
Anlage 1

„Kacheln“, um eigene Muster für Arbeitsblätter zu erstellen!



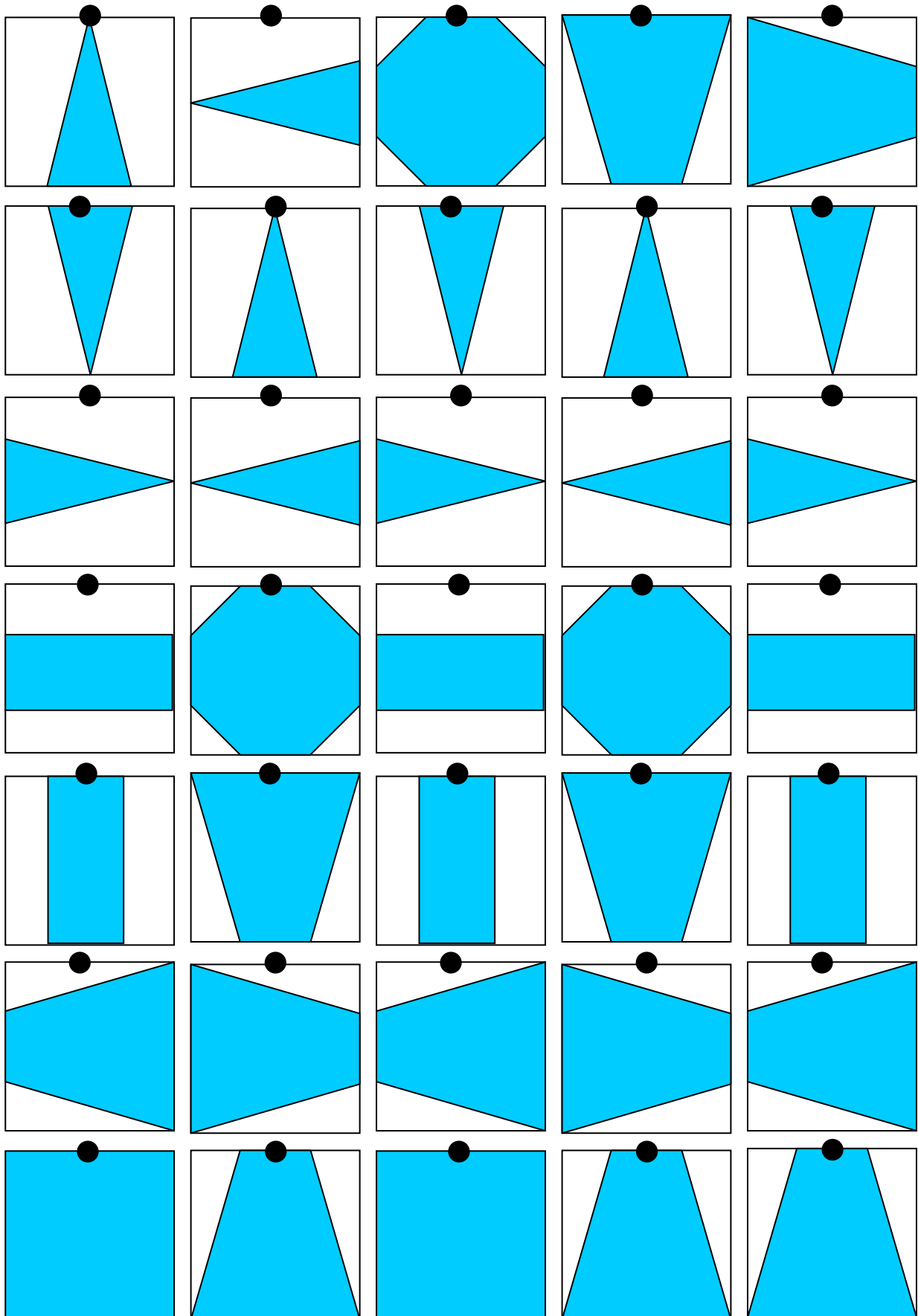
Anlage 2

Vorlage, um eigene Muster zu skizzieren!



Anlage 3

Kopierfolien für „Kacheln“ zum Laminieren.



Station Nr. 6

1, 2, 3, 4 natürliche Zahlen

Wähle vier aufeinander folgende natürliche Zahlen.

Diese Zahlen darfst Du nur addieren oder subtrahieren.

1. Finde alle möglichen Aufgaben heraus, in denen alle vier Zahlen vorkommen und berechne das Ergebnis!
2. Nimm vier andere aufeinander folgende natürliche Zahlen und verfahre wie in 1.
3. Vergleiche die Ergebnisse! Was fällt Dir auf? (Welche Zahlen kommen vor? Gerade/ungerade Zahlen, positive/negative Zahlen usw.)
4. Verändere die Aufgabenstellung z. B.
 - Wähle statt vier Zahlen drei oder fünf Zahlen.
 - Auch vor der ersten Zahl darf ein „+“ oder „-“ stehen.
 - Beginne mit der größten Zahl.

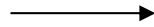
Zur besseren Übersichtlichkeit kannst Du Dir eine Tabelle anfertigen!

Lösung am Beispiel der Zahlen 13,14,15,16

①	②	③	Wert	
+	+	+	58	
+	+	-	26	
+	-	+	28	
+	-	-	-4	
-	+	+	30	
-	+	-	-2	
-	-	+	0	
-	-	-	-32	

Station Nr. 7

Mathemagie



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

In diesen 4x4-Quadraten sind die Zahlen von 1 bis 16 nach einem bestimmten Muster angeordnet. Du kannst es herausfinden, wenn Du in jeder Zeile, jeder Spalte und in den beiden Diagonalen die Summen bildest.

Was fällt Dir auf?

Im Mittelalter hat man Quadraten, die eine solche Anordnung von Zahlen hatten, magische Kräfte zugeschrieben. Das linke Quadrat ist in dem Bild „Melancholie“ aus dem Jahr 1514 von ALBRECHT DÜRER enthalten

Aufgabe 1:

Berechne die magische Summe bei den folgenden Quadraten!

Vorsicht, es befinden sich „Blindgänger“ darunter.

a)

15	-13	-11	9
-7	5	3	-1
1	-3	-5	6
-9	11	13	-15

b)

4	-10	-9	1
-7	-1	-2	-4
-3	-5	-6	0
-8	2	3	-11

c)

8	-6	-5	5
-3	3	2	0
0	-1	-2	4
-4	6	7	-7

d)

6,5	-7,5	-6,5	3,5
-4,5	1,5	0,5	-1,5
-0,5	-2,5	-3,5	2,5
-5,5	4,5	5,5	-8,5

Aufgabe 2:

Ergänze die Quadrate so, dass magische Quadrate entstehen!

a)

19	-9	-7	
	9		
5	1		
	15	17	-11

b)

20		-6	14
	10	8	
6		0	
	16		-10

c)

35		-17	
	15	11	3
7		-5	19
	27	31	

d)

26		-26	14
-18		2	-6
	-10	-14	
-22	18		

Aufgabe 3:

Für Schnellrechner! Sind dies auch magische Quadrate?

a)

-9	-3	3	9	15
4	10	11	-8	-2
12	-7	-1	5	6
0	1	7	13	-6
8	14	-5	-4	2

b)

-19	15	-16	13	12	-14
10	-8	7	8	-9	-13
4	3	-5	-4	-6	-1
-7	-3	1	2	0	-2
-8	8	-10	-11	9	5
11	-18	14	-17	-15	16

Aufgabe 4:

Setze untenstehende Zahlen in das Quadrat so ein, dass ein magisches Quadrat entsteht!

a) -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3

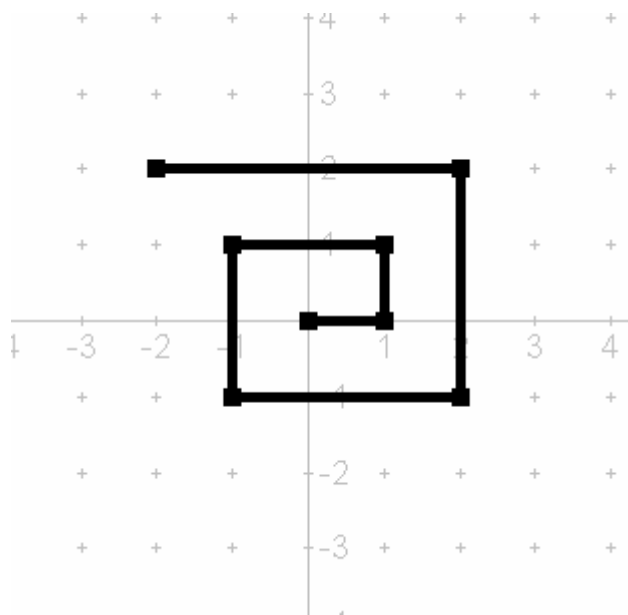
12			9
	7	6	4
5			8
	10	11	

b) -9; -5; -3; 0; 4; 5; 6

	-8	-7	3
	1		-2
-1		-4	2
-6			

Station Nr. 8

Spirale



Station Nr. 9

Beratung im Elektrogeschäft

Ein Verkäufer erklärt einem Kunden, wie ein Tiefkühlschrank arbeitet:

„... In einem Tiefkühlschrank sind alle Temperaturen immer unter Null. Wenn jetzt die Temperatur im Schrank z.B. 18⁰ beträgt, schaltet er ein. Dann steigt die Temperatur, bis auf z.B. 26⁰. Wenn 26⁰ erreicht sind, schaltet der Tiefkühlschrank ab. Dann fällt die Temperatur wieder bis auf 18⁰. Und so geht das immer hin und her.“

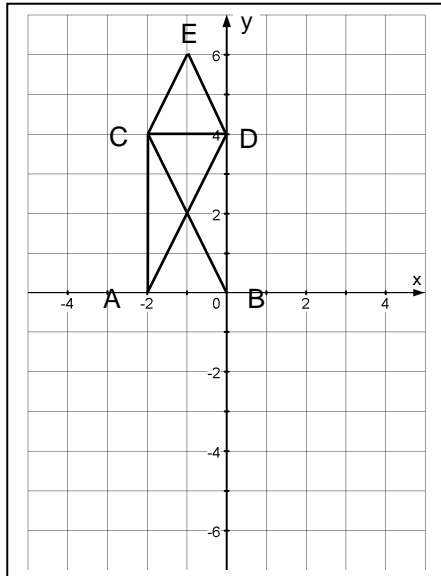


Kunde: „Versteh' ich nicht!“

Station Nr. 10

Punkte im Koordinatensystem

a) Welche Koordinaten haben die Punkte des „Nikolaushauses“?



A (/)
B (/)
C (/)
D (/)
E (/)

b) Ändere die Vorzeichen aller x-Koordinaten aus a). Trage die neuen Punkte ein, verbinde und vergleiche: _____

c) Ändere die Vorzeichen aller y-Koordinaten aus a). Trage die neuen Punkte ein, verbinde und vergleiche: _____

d) Ändere die Vorzeichen aller x-Koordinaten und y-Koordinaten aus a). Trage die neuen Punkte ein, verbinde und vergleiche: _____

Station Nr. 11

Achtung geheim!

An dieser Station lernst Du, wie man die Mathematik benutzen kann, um einen Text zu verschlüsseln.

Den Buchstaben des Alphabetes werden Punkte auf der Zahlengeraden zugeordnet.

Verschlüsselung:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Leer
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Das Wort MATHEMATIK sieht mit der obigen Verschlüsselungstabelle wie folgt aus:

1. Buchstabe M = 2

Alle anderen Buchstaben werden aus dem vorhergehenden Buchstaben „berechnet“ (Schritte nach links „-“ bzw. Schritte nach rechts „+“).

$$\begin{aligned} \text{Also: } 2 \text{ (M)} &\xrightarrow{-12} -10 \text{ (A)} \\ -10 \text{ (A)} &\xrightarrow{+19} 9 \text{ (T)} \\ 9 \text{ (T)} &\xrightarrow{-12} -3 \text{ (H)} \\ -3 \text{ (H)} &\xrightarrow{-3} -6 \text{ (E)} \text{ usw.} \end{aligned}$$

MATHEMATIK ergibt dann diese Zahlenfolge: +2; -12; +19; -12; -3; +8; -12; +19; -11; +2

Entschlüsselung

Um den Text zu entschlüsseln, musst Du die gleiche Verschlüsselungstabelle benutzen. Du suchst den Buchstaben, der zur ersten Zahl gehört: 2 = M. Von diesem Punkt aus gehst Du die angegebene Zahl von Schritten nach links, wenn ein „-“ vor der Zahl steht und nach rechts, wenn ein „+“ vor der Zahl steht oder die Zahl kein Vorzeichen hat.

Welches Wort ist hier verschlüsselt? -5; -1; +13; -9; -4; +9

Aufgabe

Verschlüssele nun den Namen Deiner Freundin/Deines Freundes oder Deines Lieblingstiers und lass Deine Partnerin/Deinen Partner den Namen entschlüsseln.

Hinweis: Du kannst ihr/ihm die Arbeit erschweren, wenn Du den Namen rückwärts schreibst!

Fasse die Verschlüsselung als Rechenaufgabe auf! Suche jetzt ein Wort mit 6 Buchstaben, das einen möglichst hohen (möglichst kleinen) Wert ergibt.

Beispiel:

Das oben gesuchte Wort ergibt folgende Rechenaufgabe:

$$-5 - 1 + 13 - 9 - 4 + 9 = 3$$

Station Nr. 12

Die gesuchte Zahl

Welche Zahl könnte die gesuchte Zahl sein? Gib nach Möglichkeit **mehrere** Beispiele an.

- a) Sebastian sucht eine ganze Zahl, die höchstens einen Abstand von 4 zu -3 hat.
- b) Monika sucht eine ganze Zahl, die genau einen Abstand von 45 zu -6 hat.
- c) Florian sucht eine natürliche Zahl, die mindestens einen Abstand von 12 zu -3 hat.
- d) Sabine sucht eine natürliche Zahl, die höchstens einen Abstand von zehn zu -7 hat.
- e) Daniel sucht eine natürliche Zahl, die genau einen Abstand von 124 zu -16 hat.
- f) Carina sucht eine ganze Zahl, die mindestens einen Abstand von 5 zu -4 hat.

Station Nr. 13

Bekannte Seen auf der Erde

1. Der tiefste See der Erde ist der Baikalsee. Sein Wasserspiegel liegt 455m über NN, der Seeboden aber 1165 m unter NN.
2. Der See Genezareth ist mit 212 m unter dem Meeresspiegel der tiefstgelegene Süßwassersee. Die maximale Seetiefe beträgt 46m.
3. Der Wasserspiegel des Kaspischen Meeres liegt 371 m höher als der Wasserspiegel des Toten Meeres (396 m unter NN), die tiefste Stelle des Seebodens liegt 1023 m unter NN.
4. Die Großen Seen in Nordamerika bilden die größte zusammenhängende Süßwasserfläche der Erde. Unter diesen fünf Seen ist der Obere See (Lake Superior) der größte. Er hat eine Tiefe von 397 m. Die Wasseroberfläche liegt 183 m über NN.
5. Der größte See Afrikas ist der Tanganjikasee, der 1470 m tief ist und dessen Seeboden 688 m unter NN liegt.

Aufgaben:

- Stellt die Zahlenangaben über die Höhen und Tiefen zeichnerisch dar (kariertes DIN A 3-Blatt), so dass man alle Angaben schnell ablesen kann.
- Markiert dabei der Aufgabenstellung entnommenen und von euch berechneten Werte in zwei verschiedenen Farben.

Zahlbereich Ganze Zahlen

Offene Aufgabe

*Verantwortlich für diese Offene Aufgabe
Ralf Frühholz, Ottmar Hofmann, Petra Neymeyr, Georg Schmitt*

Die Lieblingszahl

Stefans Lieblingszahl ist schon seit langer Zeit die 15. Er versucht immer wieder die 15 auf verschiedene Arten darzustellen. Als er sich mit der Addition und Subtraktion beschäftigte, wollte er eine Lösung für folgende Aufgabe finden:

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 15$$

- a) Finde eine Lösung!
- b) Gib möglichst viele Lösungsmöglichkeiten an!

Zahlbereich Bruchzahlen

Lernzirkel

Pflicht:

Station 1: Wie die Brüche als Anteile ...

Station 2: Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

Station 3: Die Ordnung der Brüche auf der Zahlengeraden

Station 4: Wer ist größer?

Station 5: Mit Bruchanteilen im Quadrat

Station 6: $\frac{1}{6}$ - jedes Mal in einer anderen Bedeutung

Station 7: Verflixte Anteile

Station 8: Noch mehr verflixte Anteile

Station 9: Mit Brüchen wandern ...

Wahl:

Station 10: Wie die Brüche mit den Prozenten ...

Station 11: Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

Station 12: $\frac{1}{6}$ - jedes Mal in einer anderen Bedeutung

Station 13: Jetzt springt das Dreieck ins Quadrat!

Station 14: In Bruchdorf ist 'was los.

Lernzirkel

Thema: Bruchzahlen

Kontrollzettel von: _____

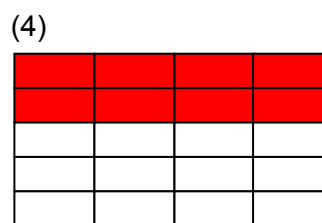
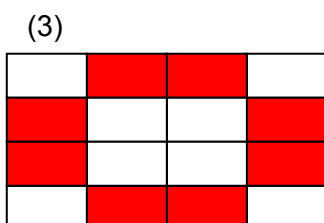
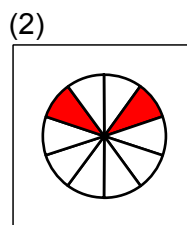
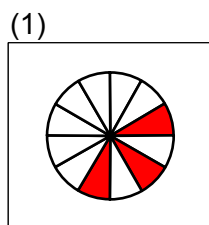
- Du kannst die Reihenfolge der Stationen selbst wählen.
- Du musst alle Pflichtstationen bearbeiten.
- Lies die Arbeitsanweisungen zu den einzelnen Stationen sorgfältig durch!
- Sorge durch Ruhe für eine angenehme Arbeitsatmosphäre!

	Station	Titel	erledigt am:	Die Aufgabe war für mich	Anzahl der Fehler
Pflicht	1	Wie die Brüche als Anteile...		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	2	Mit Brüchen auf der Zahlengeraden		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	3	Die Ordnung der Brüche auf der Zahlengeraden		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	4	Wer ist größer?		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	5	Mit Bruchanteilen im Quadrat		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	6	$\frac{1}{6}$ - jedes Mal in einer anderen Bedeutung		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	7	Verflixte Anteile		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	8	Noch mehr verflixte Anteile		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	9	Mit Brüchen wandern...		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
Wahl	10	Wie die Brüche mit den Prozenten ...		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	11	Mit Brüchen auf der Zahlengeraden		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	12	$\frac{1}{6}$ -jedes Mal in einer anderen Bedeutung		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	13	Jetzt springt das Dreieck ins Quadrat!		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
	14	In Bruchdorf ist 'was los.		leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	

Station Nr. 1

Wie die Brüche als Anteile ...

Gib den gefärbten Anteil in den Figuren (1) - (4) als gekürzten Bruch an.



Station Nr. 2

Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

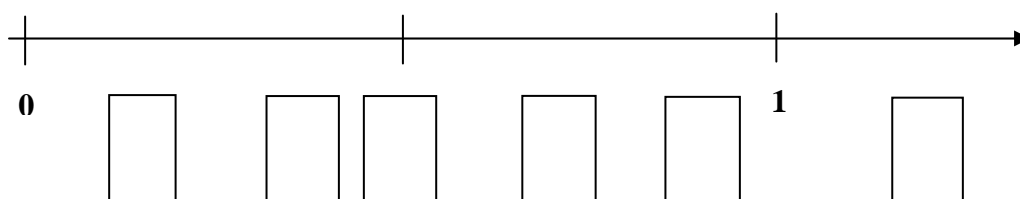
a) Benenne eine Bruchzahl, die zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ liegt und markiere exakt die drei Zahlen auf einer Zahlengerade mit geeigneter Einteilung.

b) Welche Bruchzahl liegt genau in der Mitte zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$?

Erkläre, wie du diese Zahl gefunden hast.

Station Nr. 3

Die Ordnung der Brüche auf der Zahlengeraden



Die Bruchzahlen $\frac{6}{5}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{2}{14}$; $\frac{12}{10}$ und $\frac{1}{2}$ setzen sich nach Ordnung.

Fülle die Lücken mit der passenden Bruchzahl. Erkläre, für welche der angegebenen Bruchzahlen in der Zeichnung kein freies Feld vorhanden ist und ergänze dieses.

Station Nr. 4

Wer ist größer?

Welcher der beiden Brüche ist der größere? Setze das Zeichen $<$, $>$ oder $=$ richtig ein.

a) $\frac{3}{7} \square \frac{4}{7}$

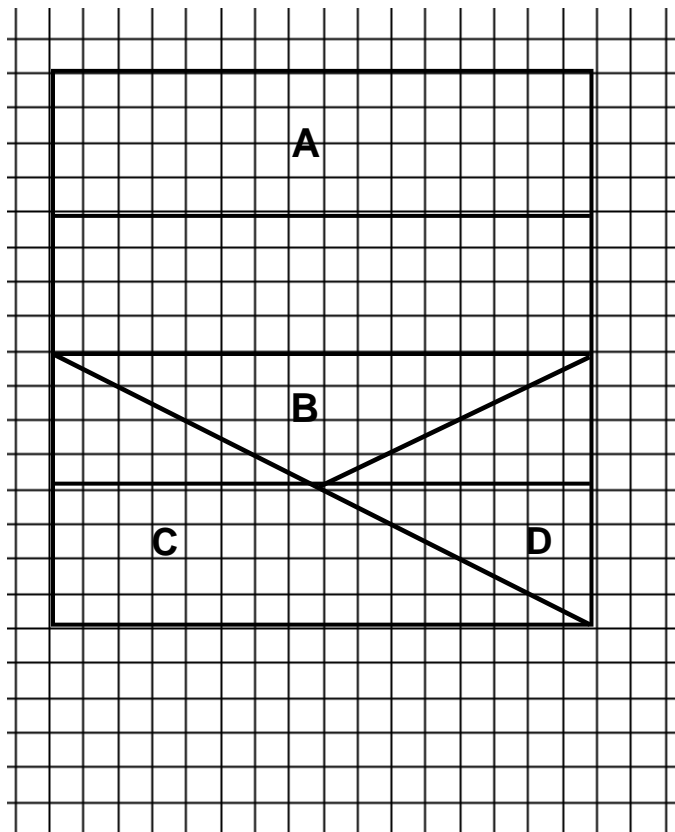
b) $\frac{3}{10} \square \frac{3}{11}$

c) $\frac{2}{3} \square \frac{3}{4}$

Station Nr. 5

Mit Bruchanteilen im Quadrat

Gib die Bruchteile der benannten Teilflächen an der Gesamtfläche an.



Teilfläche	A	B	C	D
Bruchteil				

Station Nr. 6

$\frac{1}{6}$ – jedes Mal in einer anderen Bedeutung

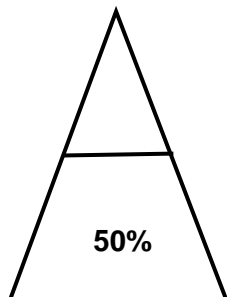
- a) Ein Sechstel der 1800 Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums „Am guten Sender“ verfügt über einen I-Phone.
- b) Die Erlöse aus dem Holzverkauf haben sich wegen des Preisverfalls auf Grund der schlechten wirtschaftlichen Lage dramatisch bis auf 75 Euro je Tonne und damit auf ein Sechstel vermindert.

Station Nr. 7

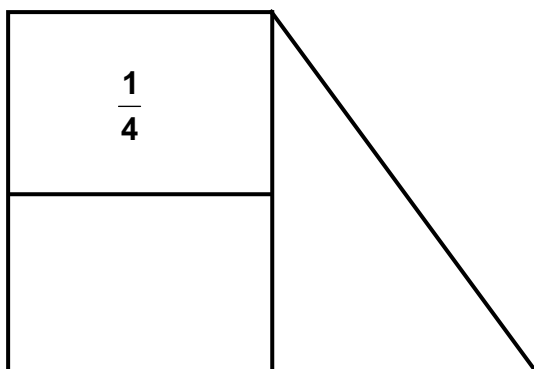
Verflixte Anteile

Verflixte Anteile – sind sie richtig oder falsch? Begründe dein Ergebnis und korrigiere ggf. die falschen Angaben.

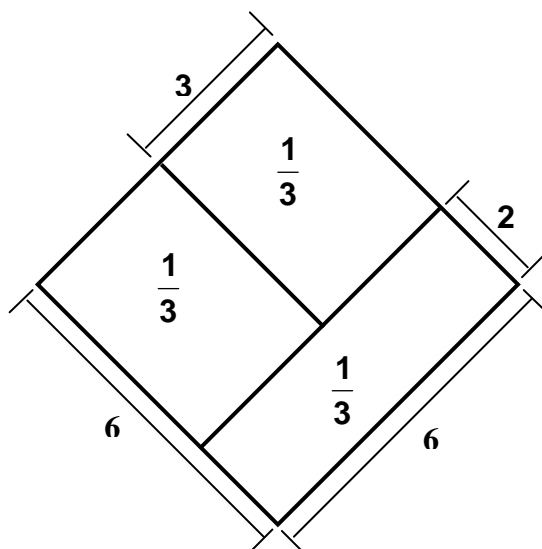
a)



b)



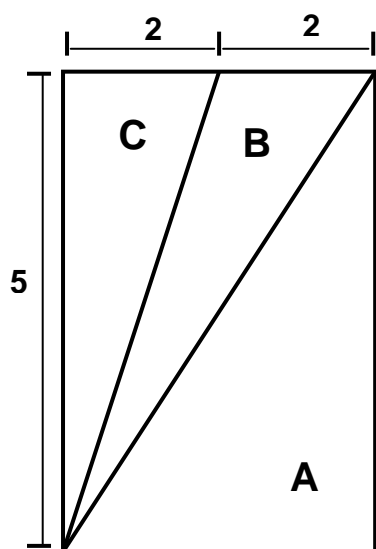
c)



Station Nr. 8

Noch mehr verflixte Anteile

Stelle die Flächeninhalte A,B,C als Anteile vom Flächeninhalt des Rechtecks dar und ordne Sie der Größe nach.



Station Nr. 9

Mit Brüchen wandern....



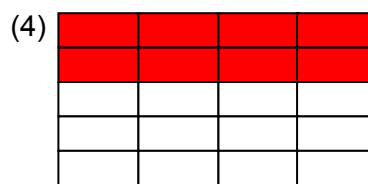
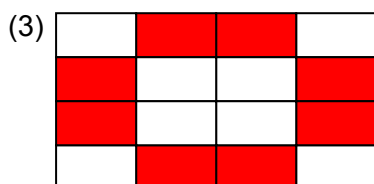
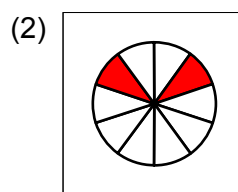
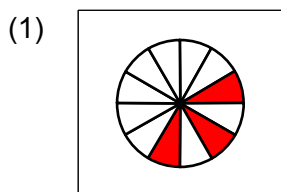
An einem schönen Sommertag stehst du im UNESCO-Weltkulturerbe „Nationalpark Sächsische Schweiz“ und möchtest wandern. Zu Beginn der Wanderung zeigen dir Hinweisschilder mögliche Wanderwege.

- Schätze, wie weit es von deinem Ausgangspunkt zum Gasthaus (Ghs.) Waldhäus'l ist. Gib deine Angaben in km an.
- Dein Freund Max ist schon vorgelaufen und ruft dich nach einer Mahlzeit im Gasthaus (Ghs.) Waldhäus'l mit seinem Handy an. Er möchte jetzt vom Gasthaus Waldhäus'l über die Dorfbachklamm nach Altendorf wandern. Kannst du ihm mitteilen, wie lange er nach den Hinweisschildern dafür brauchen wird?
- Bei der Beschilderung ist die Touristeninformation davon ausgegangen, dass ein Wanderer 4 km in einer Stunde schafft. Wie viel km liegt nach diesen Angaben die Neumannmühle vom Ausgangspunkt entfernt?

Station Nr. 10

Wie die Brüche mit den Prozenten ...

a) Welcher der folgenden Prozentsätze gibt jeweils den grauen Anteil in den Figuren (1) – (4) richtig an: 20%, 25%, 40%, 50% ?



b) Stelle 75% und 80% jeweils als gefärbten Anteil in einer selbst gewählten Figur grafisch dar.

Station Nr. 11

Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

Welcher Dezimalbruch liegt in der Mitte von 0,3 und 0,39?

Erkläre, wie du die Zahl gefunden hast.

Station Nr. 12

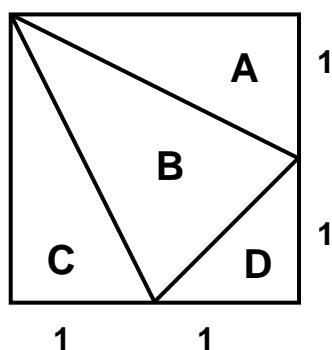
$\frac{1}{6}$ – **jedes Mal in einer anderen Bedeutung** (siehe auch Station 6)

Die Winzer „Am Mathematischen Hang“ klagen heftig über Hagelschäden. Nach ersten Schätzungen der Winzergenossenschaft ist nur noch mit einer Ernte von 120 000 Litern zu rechnen. Das ist ein Sechstel weniger als in normalen Jahren.

Station Nr. 13

Jetzt springt das Dreieck ins Quadrat!

Welchen Bruchteil der Fläche des großen Quadrats nehmen die Dreiecke ein?



Station Nr. 14

In Bruchdorf ist 'was los.¹

Die Reporterin Carla Kultura rast kreuz und quer durch das Dorf, findet endlich den Bürgermeister und interviewt ihn. Dieser berichtet:

„In Bruchdorf ist $\frac{1}{8}$ der Fläche mit Wohnhäusern, $\frac{1}{24}$ mit öffentlichen Gebäuden und $\frac{1}{5}$ mit Scheunen und Ställen bebaut. Gärten und Wiesen nehmen den Anteil $\frac{7}{12}$ ein. Der Rest, das sind $\frac{1}{10}$, wird von Straßen, Wegen und Plätzen beansprucht.“

Carla wirkt nachdenklich.

¹ Aus: Service-CD (Kap. 02 Rechnen) zum Lambacher Schweizer 2, Heidi Buck, Jürgen Frink, Irmgard Esche-Gallinger u.a., Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2005

Zahlbereich Bruchzahlen

Offene Aufgabe

*Verantwortlich für die offene Aufgabe:
Lucie Kluge-Jungbluth, Michael Lamberty, Peter Staudt, Claudia Steiert*

Paula gibt Rätsel auf

Fritz und Achim wollen sich nach ihrem Training in der Half-Pipe mit Gummibären belohnen. Fritz hat 5 und Achim 3 Tüten Gummibären dabei. Kaum haben sie ausgepackt, erscheint die völlig erschöpfte Paula und fragt, ob sie mitnaschen darf. Natürlich können die beiden Jungs der hübschen Paula ihren Wunsch nicht abschlagen. Die Drei teilen ihren Gesamtvorrat gleichmäßig unter sich auf. Paula schaut auf die Uhr und merkt, dass sie sich verspätet hat. Großzügig wirft sie den beiden Jungs schnell noch 4 Euro zu und ruft im Weggehen: „Teilt euch das Geld gerecht auf.“

Zahlbereich Rationale Zahlen

Lernzirkel

Station 1: Rechenschlange

Station 2: Zahlenmauern

Station 3: Dreiecksteppich

Station 4: Rechennetz

Station 5: Fragen formulieren

Station 6: Zahlensuche

Verantwortlich für diesen Lernzirkel:

Armin Baeger, Franz-Josef Göbel, Helga Schmidt, Jana Zienicke

Lernzirkel

Thema: Rationale Zahlen

Kontrollzettel von: _____

- Du kannst die Reihenfolge der Stationen selbst wählen.
- Du musst alle Pflichtstationen bearbeiten.
- Lies die Arbeitsanweisungen zu den einzelnen Stationen sorgfältig durch!
- Sorge durch Ruhe für eine angenehme Arbeitsatmosphäre!

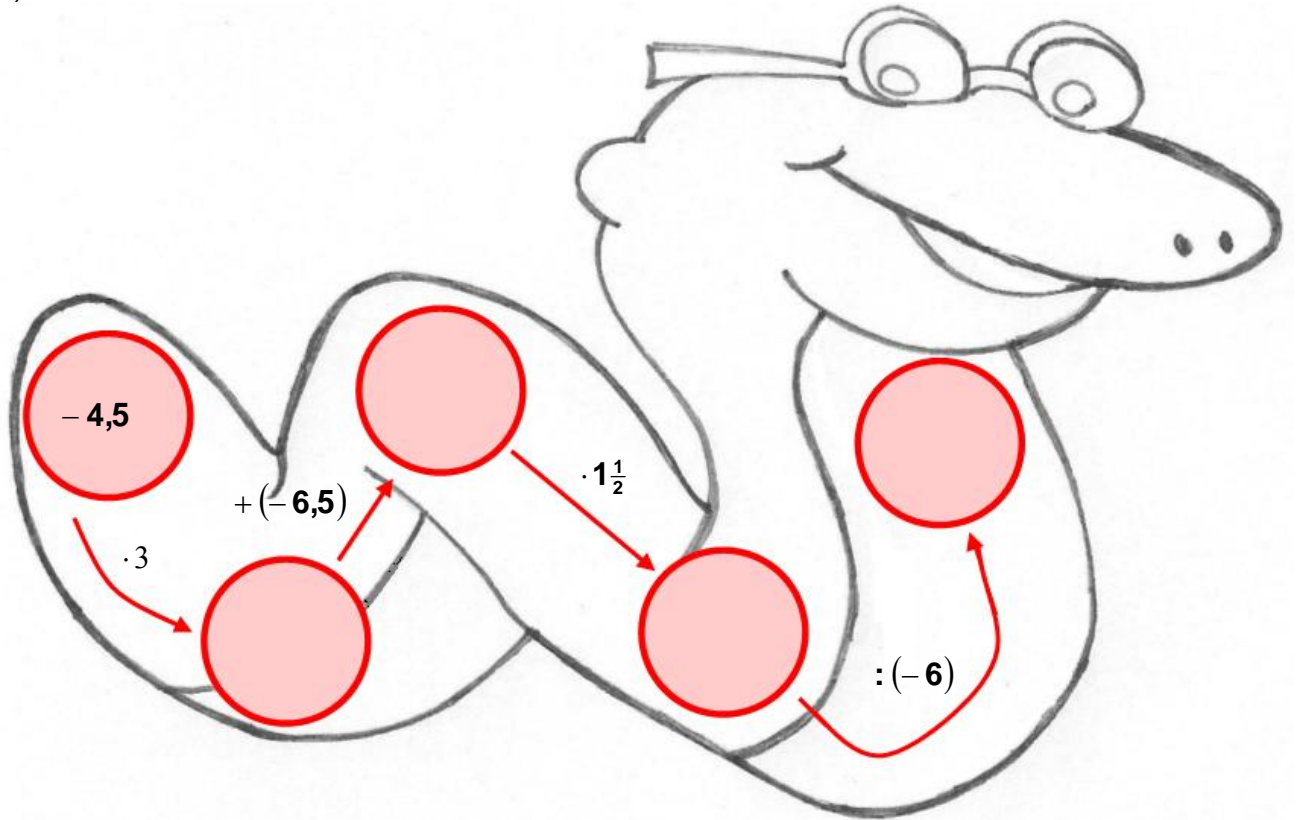
Station	Titel	Pflicht- station	Wahl- station	erledigt am:	Die Aufgabe war für mich	Anzahl der Fehler
1	Rechenschlange				leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
2	Zahlenmauern				leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
3	Dreiecksteppich				leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
4	Rechennetz				leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
5	Fragen formulieren				leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	
6	Zahlensuche				leicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> schwer <input type="checkbox"/>	

Station Nr. 1

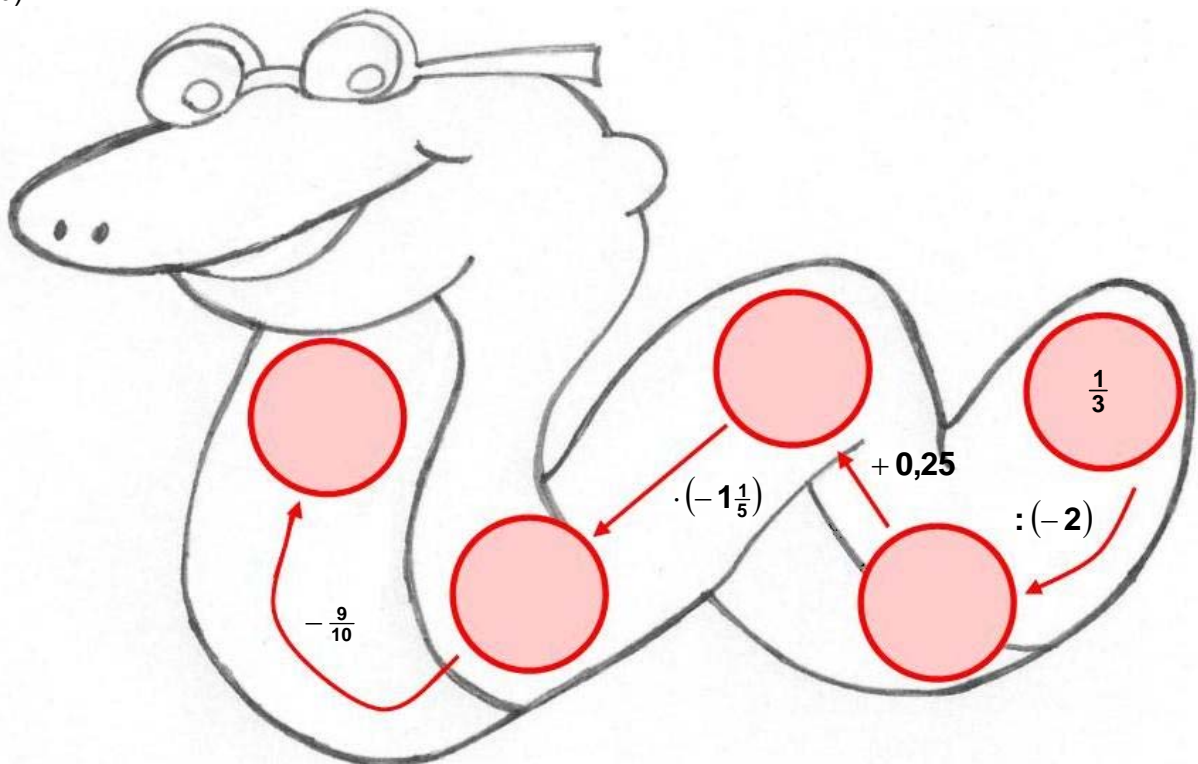
Rechenschlange

Wähle eine der beiden Schlangen aus! Fülle die Rechenschlange aus!

a)



b)

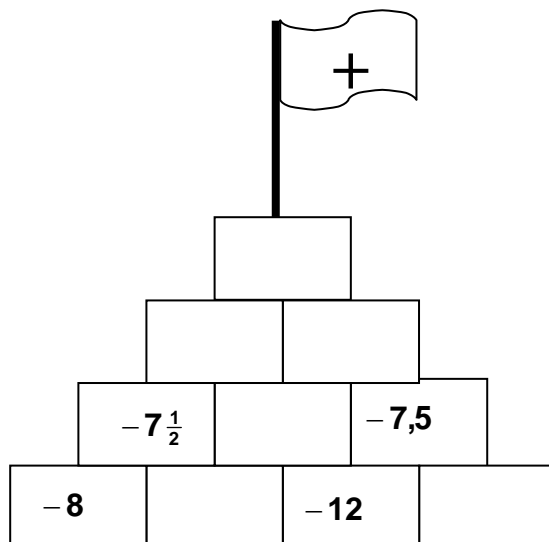


Station Nr. 2

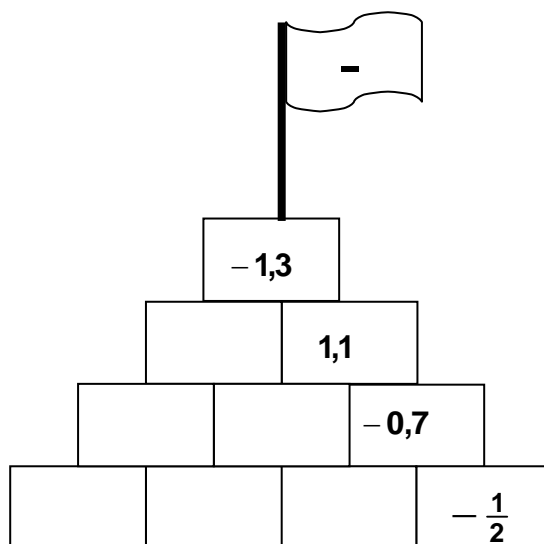
Zahlenmauern

Wähle eine der beiden Zahlenmauern aus! Fülle die Zahlenmauer aus!

a)



b)

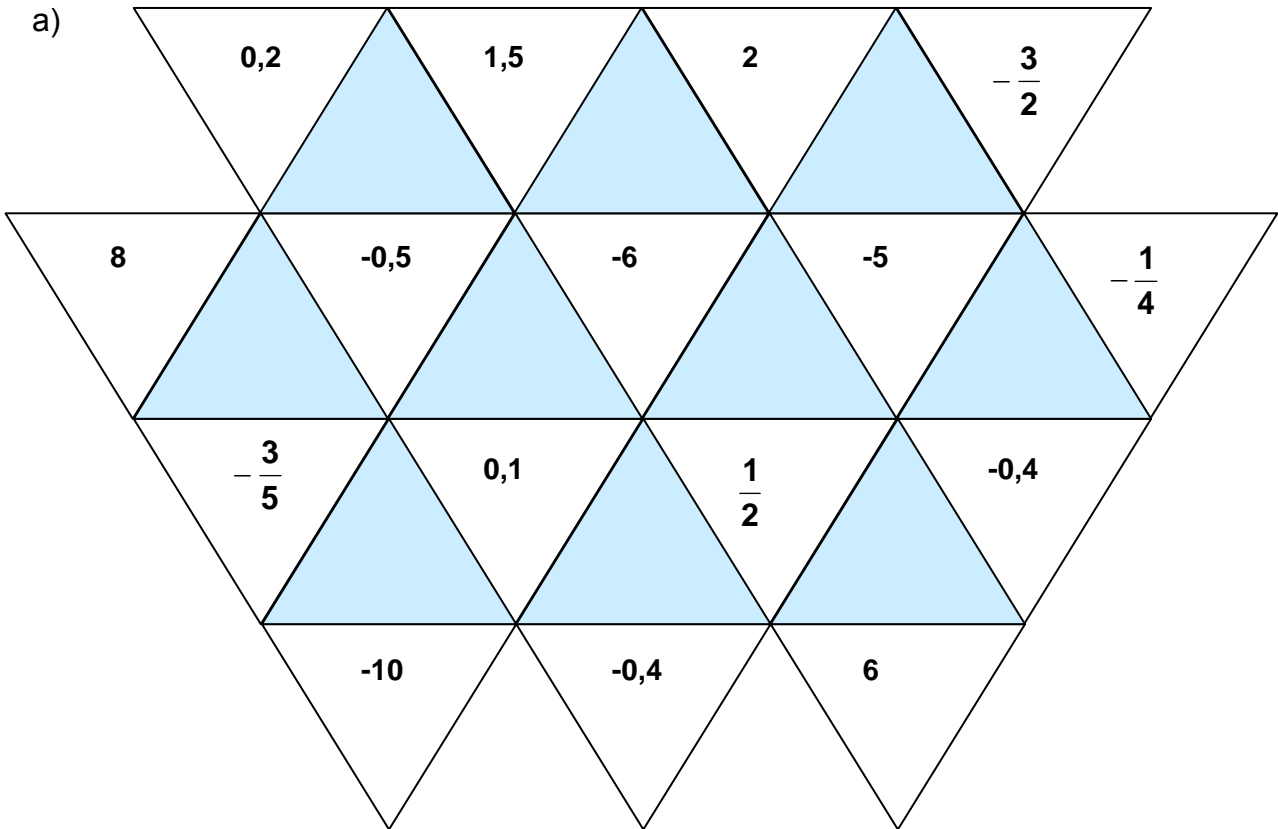


Station Nr. 3

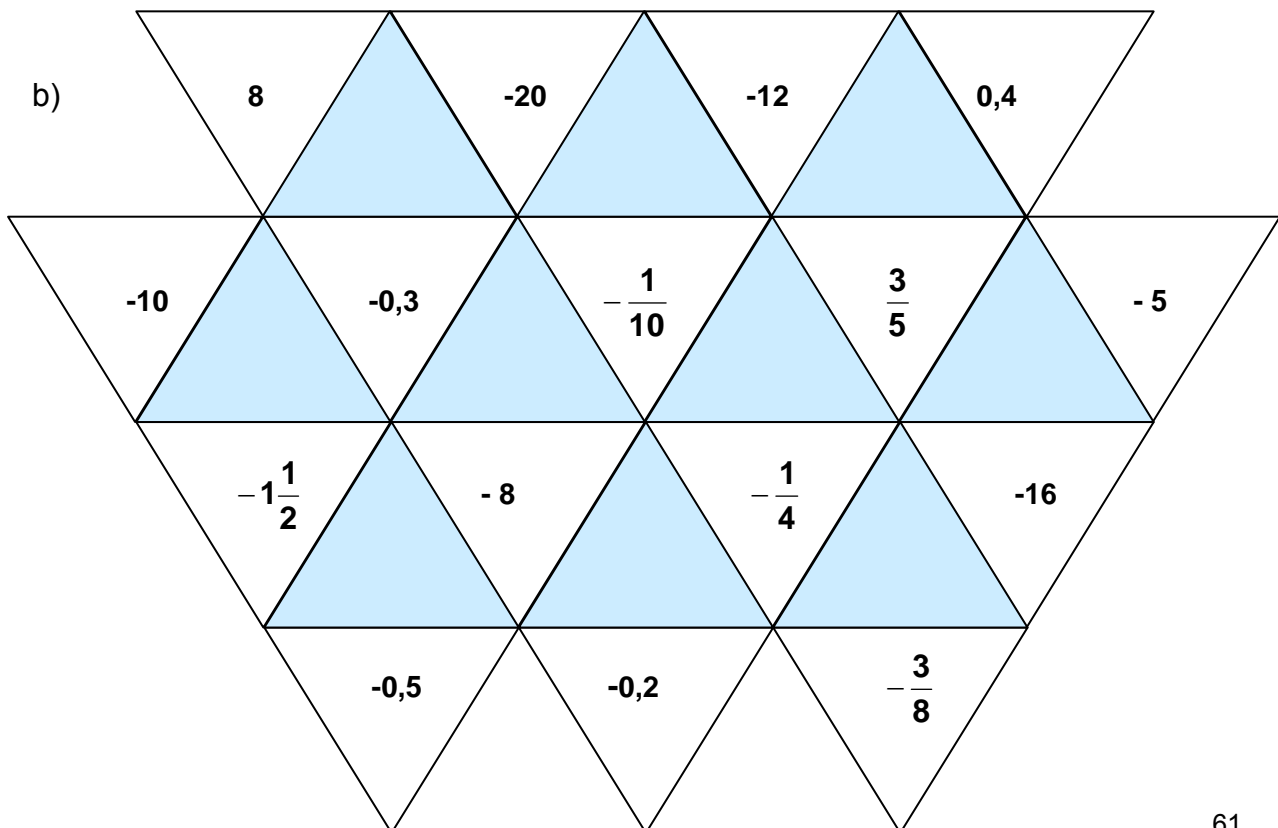
Dreiecksteppich

Wähle einen Dreiecksteppich aus! Fülle die grauen Dreiecke aus, indem du jeweils die drei Zahlen in den angrenzenden drei Feldern miteinander multiplizierst.

a)



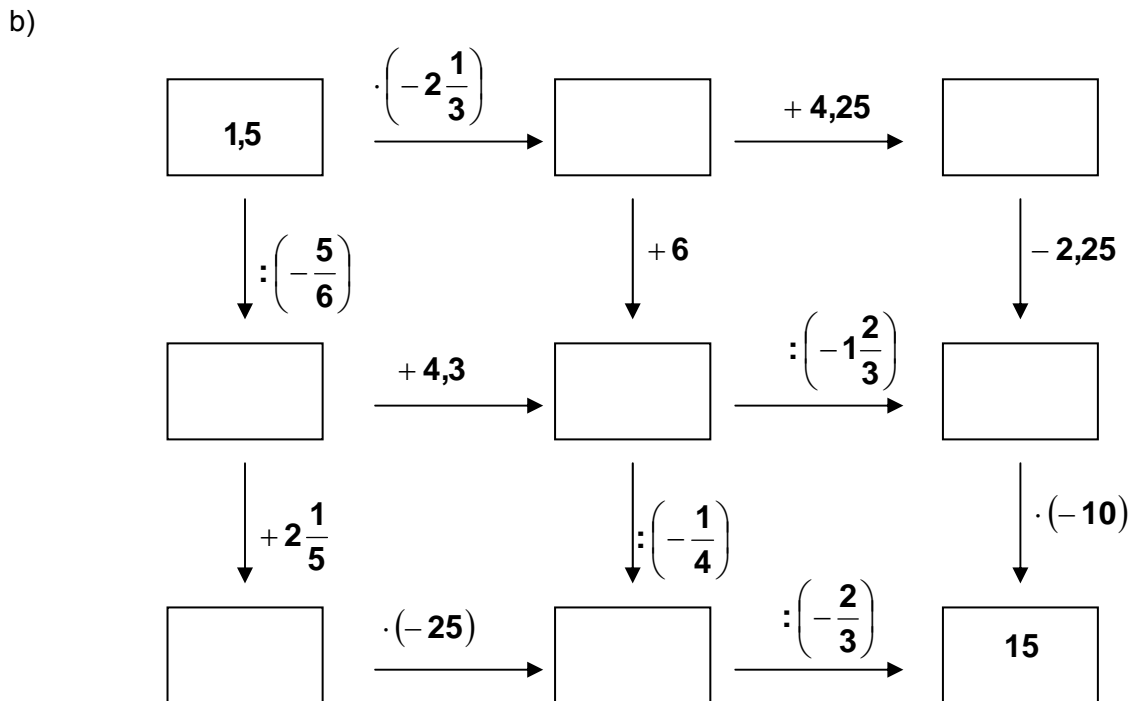
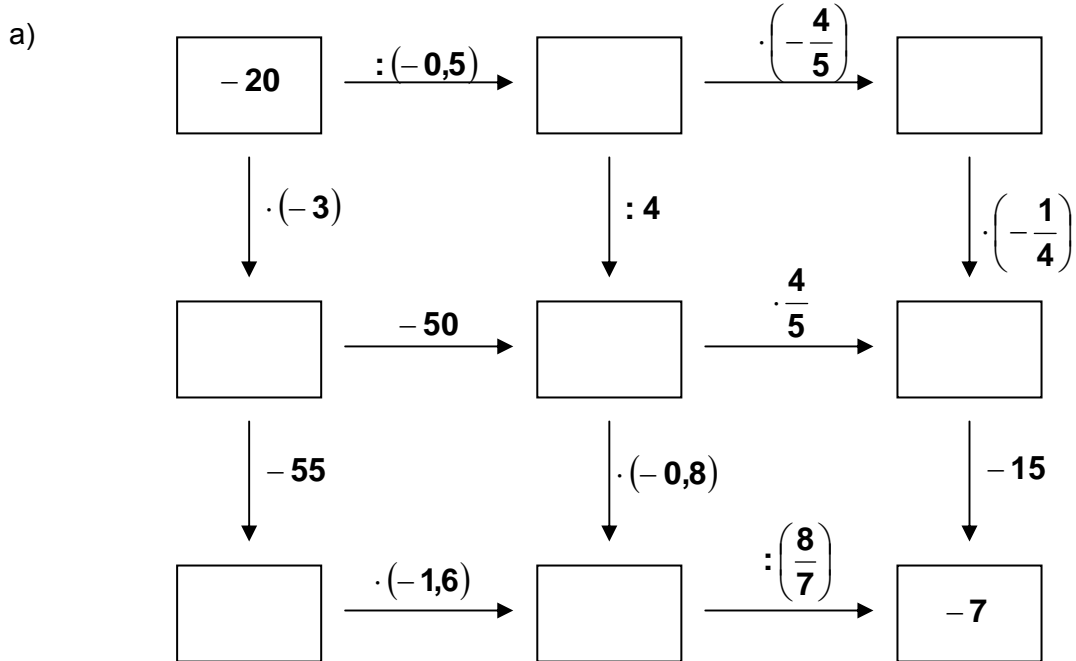
b)



Station Nr. 4

Rechennetz

Wähle eines der beiden Rechennetze aus! Berechne die im Rechennetz fehlenden Zahlen!



Station Nr. 5

Fragen formulieren

Formuliere eine Frage und beantworte sie mithilfe einer Rechenaufgabe.

1. Auf dem Flug von Frankfurt nach Mallorca wurden folgende Lufttemperaturen gemessen

Frankfurt	- 5° C
Mallorca	+ 12° C
Außentemperatur in 10000 m	- 42° C
Innentemperatur des Flugzeuges	+ 20° C

2. Kathrin besitzt ein Jugendgirokonto. Von diesem Konto kann sie am Automaten Geld abheben und Beträge überweisen. Das monatliche Taschengeld von 20 € wird von den Eltern auch auf das Konto überwiesen.

Privatgirokonto	23416780	BLZ 4364709	Kontoauszug	12
Buchungstag	Vorgang	Betrag		
02.07.	Zahlungseingang	+ 20,00 €		
03.07	Geldautomat	- 15,00 €		
04.07	Zahlungseingang	+ 13,00 €		
05.07	Handy-Abrechnung	- 12,50 €		
	Kontostand: 05.07.	+ 45,00€		

3. Die Titanic ist 1912 mit 1490 Personen an Bord gesunken. Ihr Wrack wurde 1985 in einer Tiefe von 3821 m entdeckt. Vor der Küste des US Bundesstaates South Carolina wurde in 2700 m Tiefe der Schaufelraddampfer „Central America“ entdeckt. Das 1857 untergegangene Schiff riss nicht nur 425 Passagiere, sondern auch Gold im Wert von 1 Milliarde Dollar in die Tiefe.

Station Nr. 6

Zahlensuche

The diagram shows two identical number lines, each with four boxes: the first is green and the others are cyan. Between them is a plus sign in a box. Below are various cards with numbers and signs: 7, -, 5, -, 2, 8, 1, +, 0, 3, +, 4, 9, 6.

Du hast diese Kärtchen mit Ziffern und Vorzeichen zur Verfügung. Mit diesen Kärtchen sollst du die grauen Felder ausfüllen

1. Wähle Ziffern und Vorzeichen so, dass der Wert der Summe +328 ergibt
2. Wähle Ziffern und Vorzeichen so, dass der Wert der Summe möglichst klein wird.
3. Wähle Ziffern und Vorzeichen so, dass der Wert der Summe möglichst nahe bei Null liegt.

**Anregungen und Vorschläge
für Lernzirkel und offene Aufgaben
zum Thema "Zahlen"**

**Hinweise für Lehrkräfte
und Lösungen**

Einsatz der Materialien im Unterricht

Die Anregungen und Vorschläge für Lernzirkel und offene Aufgaben zum Thema „Zahlen“ sind in vier Abschnitte gegliedert: Natürliche Zahlen, Ganze Zahlen, Bruchzahlen und Rationale Zahlen. Dies entspricht dem schrittweisen Aufbau der Zahlbereiche, wie er im Lehrplan von Rheinland-Pfalz für die Klassenstufen 5 bis 8 vorgesehen ist:

- Orientierungsstufe: Natürliche Zahlen (5. Schuljahr), Ganze Zahlen (5./6. Schuljahr), Bruchzahlen (6. Schuljahr)
- Klassenstufen 7 und 8: Rationale Zahlen

Die Lernzirkel und offenen Aufgaben können in den angegebenen Schuljahren sowohl zur Einführung der jeweils „neuen“ Zahlen und somit zur Zahlbereichserweiterung genutzt werden, sie können aber auch der Übung und Vertiefung dienen, wenn der „neue“ Zahlbereich bereits erarbeitet ist.

Werden die Lerneinheiten nicht im Rahmen der Erarbeitung eines Zahlbereichs eingesetzt, sondern zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt bzw. in einem späteren Schuljahr, so stellen die Aufgaben Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler, wie sie bei offenen Aufgaben und Lernstandserhebungen üblich sind. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich auf eine Fragstellung einlassen und geeignete Lösungswege suchen, ohne unmittelbar auf den gerade im Unterricht behandelten Stoff und entsprechende Lösungsmuster rekurrieren zu können.

Lernzirkel oder offene Aufgabe?

Dies ist kein Gegensatz. Die Lernzirkel bestehen aus einzelnen Aufgaben, die, auch wenn sie im Lernzirkel aufeinander abgestimmt sind, auch als einzelne Aufgaben singulär eingesetzt werden können. Es handelt sich dabei um eine Mischung aus offeneren Aufgaben und (weniger offenen) Aufgabentypen, wie sie häufig in Lernstandserhebungen auftreten.

Außer den Lernzirkeln werden zu verschiedenen Zahlbereichen auch einzelne offene Aufgaben angeboten. Sie sollten von den Schülerinnen und Schülern selbstständig ohne Anleitungen durch die Lehrkraft mit Partnern oder in Gruppen bearbeitet werden. Da in der Regel verschiedene Lösungswege zum Ziel führen können, sollten die Schülerinnen und Schüler nach der Bearbeitung die Gelegenheit haben, ihren eigenen Weg und ihre Überlegungen darzustellen und zu begründen.

Methodische Hinweise zu den Lernzirkeln

Das Lernen an Stationen ist eine offene Unterrichtsform, die ein hohes Maß an Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler ermöglicht. Das Unterrichtsmaterial ist in Stationen gegliedert und so aufbereitet, dass die Lernenden sich damit eigenständig und weitgehend eigenverantwortlich beschäftigen. Sie können dabei im eigenen Arbeitstempo lernen, erfahren jedoch, dass sie ihre Arbeitszeit angemessen einteilen müssen. Auch die Durchführung einer vernünftigen Selbstkontrolle wird beim Lernen an Stationen trainiert.

Mit dem Lernen an Stationen ist durch die Einteilung der Aufgaben in **Pflichtstationen** und **Wahlstationen** eine Differenzierung relativ leicht möglich. Die Lernzirkel „Natürliche Zahlen“, „Ganze Zahlen“ und „Bruchzahlen“ enthalten je einen Vorschlag für eine solche Differenzie-

rung. Bei den ausgewiesenen Wahl- oder Zusatzstationen handelt es sich um Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad. Im Lernzirkel „Rationale Zahlen“ legt die Lehrkraft fest, welche Stationen zum Pflichtbereich und welche zum Wahlbereich gehören und lässt dies die Schülerinnen und Schüler in ihrem Laufzettel vermerken.

Zur Anpassung an das Leistungsspektrum einer Lerngruppe können auch einzelne Stationen gestrichen oder durch andere Arbeitsaufträge ersetzt werden (z.B. Aufgaben aus dem Schulbuch). Auch die Änderung von Zahlenwerten, Aufgabenstellung und/oder die Angabe zusätzlicher Fragen kann hilfreich sein. Hinweise dazu befinden sich in den methodischen Anmerkungen zu den einzelnen Stationen.

Jedem Lernzirkel wurde ein **Laufzettel** bzw. **Kontrollzettel** beigelegt, der von den Schülerinnen und Schülern ausgefüllt wird. Er begleitet die Schülerinnen und Schüler auf dem Weg durch den Lernzirkel und ermöglicht der Lehrkraft einen Überblick über den jeweiligen Stand der Arbeit.

Zu jedem der vier thematischen Abschnitte gibt es eigene Informationen für Lehrkräfte. Sie enthalten zu den einzelnen Stationen und Aufgaben

- methodische Anmerkungen,
- die Zuordnung zu den Kompetenzen und Anforderungsbereichen der Bildungsstandards
- und die Lösungen.

Die **Lösungen** der Stationen und Aufgaben sind so abgefasst, dass sie den Schülerinnen und Schülern zur Selbstkontrolle zur Verfügung gestellt werden können. Dies trägt wesentlich zur Förderung eines selbstständigen und eigenverantwortlichen Lernens bei. Die Lösungsblätter sind Kopiervorlagen, die den Schülerinnen und Schülern ausgehändigt werden oder in einem Schnellhefter zur Einsicht zur Verfügung stehen.

Die für einen Lernzirkel benötigte **Arbeitszeit** hängt entscheidend von der Lerngruppe ab. Als Orientierung und Richtwert wurden **90 Minuten** veranschlagt, die in der Regel nicht überschritten werden sollten. Ggf. müssen Stationen von der Lehrkraft herausgenommen oder vereinfacht werden.

Natürliche Zahlen

*Verantwortlich für Aufgaben und Kommentare:
Friederike Beran, Volkhardt Fuhrmann, Christine Hahn, Paul Müller*

Methodische Hinweise zum Lernzirkel

Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz:

- Benötigte Vorkenntnisse zur Bearbeitung des Lernzirkels:
Die Schülerinnen und Schüler können große natürliche Zahlen lesen und schreiben; sie kennen den Aufbau eines Stellenwertsystems, können natürliche Zahlen ordnen, runden und veranschaulichen und können die Grundrechenarten ausführen.
- Der Lernzirkel dient der Festigung des Themas „Natürliche Zahlen“.
- Er kann ab Klassenstufe 5 eingesetzt werden.

Hinweise zur Struktur des Lernzirkels:

- Die Stationen können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Hinweise zu Differenzierungsmöglichkeiten:

- Die Differenzierung erfolgt hauptsächlich durch Unterteilung in Pflichtstationen (1 bis 7) und Wahlstationen (8 und 9).

Am Ende der Bearbeitungszeit von 90 Minuten sollen alle Schülerinnen und Schüler alle Pflichtstationen bearbeitet haben. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sollen darüber hinaus auch eine oder beide Wahlstation(en) bearbeitet haben.

Hinweise zur Organisation der Selbstkontrolle durch die Schülerinnen und Schüler:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten einen Laufzettel, auf dem sie markieren, welche Aufgaben sie bereits erledigt haben und wie sie jeweils deren Schwierigkeitsgrad beurteilen.
- Die Lösungsblätter zu den einzelnen Stationen werden in mehrfacher Ausführung an einer zentralen Stelle (z.B. Lehrerpult) aufbewahrt und den Schülerinnen und Schülern nach der Bearbeitung einzelner Stationen zur Selbstkontrolle zur Verfügung gestellt. Die Schülerinnen und Schüler halten auf ihrem Laufzettel die Anzahl der Fehler fest und korrigieren sie.

Methodische Hinweise zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

Station 1: Zieh ab!

Schülerinnen und Schüler sollen für dreistellige Zahlen die Differenzen aus den größt- und kleinstmöglichen Zahlen, die man aus ihren Ziffern bilden kann, berechnen. Wählt man dabei nicht drei gleiche Ziffern, so landet man nach spätestens fünf Schritten bei 495. Drei gleiche Ziffern führen zum Differenzwert null. Eine Variationsmöglichkeit ist das Verringern oder Erweitern der Anzahl der Ziffern. Auch hier gibt es Besonderheiten zu erkennen.

Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass – unabhängig von der Ausgangszahl – in jedem Fall (Ausnahme: 3 gleiche Ziffern) das Ergebnis 495 erreicht wird und sich ab da nichts mehr ändert.

Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus erkennen:

- die Quersummen aller Differenzen betragen immer 18,
- die Zehnerziffer aller Differenzen ist stets 9, die Summe der Einer- und Hunderterziffern ergibt immer 9,
- um zum Ergebnis 495 zu kommen, sind maximal 5 Schritte erforderlich,
- als Differenzen ergeben sich immer Vielfache von 99.

Station 2: Leg um!

Aus der Grundschule kennen Schülerinnen und Schüler den Zahlenraum bis zu einer Million. Bei der Erweiterung des Zahlenraums wird die Größenvorstellung weiterentwickelt. Die korrekte Sprechweise sowie das Übersetzen von Text in Zahlen und umgekehrt sind wichtige Bausteine dieser Entwicklung. In dieser Aufgabe enthalten die Kärtchen nicht immer nur eine Ziffer und erschweren so die Anordnung. Entscheidend hierbei ist nicht die Größe der Zahl auf den Kärtchen, sondern die Größe der Ziffer mit dem höchsten Stellenwert (d.h. jeweils die am weitesten links stehende Ziffer). Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler können mit Hilfe einer Stellenwerttafel den Zahlenwert besser ablesen.

Station 3: Wirf hin!

Spielerischer Umgang mit Zahlen und der Stellentafel fördert deren Verständnis. Gepaart mit Glück und mathematischem Geschick sind solche Spiele besonders motivierend.

Station 4: Zieh Leine!

Auch hier geht es umgekehrt wie in Station 2 um das korrekte Übersetzen von Zahlen in Text.

Für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler können die Textbausteine zusammengefasst werden (Station 4b). Lehrerinnen und Lehrer können entscheiden, welche Variante sie in ihrer Lerngruppe einsetzen wollen.

Station 5: Teil ein!

Schülerinnen und Schüler sollen die fehlenden Markierungen und Werte auf der Thermometerskala bzw. auf dem Zahlenstrahl auftragen. Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler kann man beauftragen, die Skalen auf Karopapier zu übertragen, um durch Auszählen der Kästchen die Einteilung besser vornehmen zu können.

Achtung! Unter Umständen kann es beim Drucken zu leichten Längenveränderungen kommen. Für die Schülerlösung ist es sinnvoll, die Lösungsgraphik auf Folie zu kopieren.

Station 6: Runde sinnvoll!

In vielen Fällen ist das Runden von mehrstelligen Zahlen sinnvoll, insbesondere beim Darstellen solcher Zahlen in Diagrammen. Daneben gibt es aber Fälle, in denen der exakte Wert von Bedeutung ist und daher nicht verändert werden darf.

Ob in Teil a) die Antwort ‚Ja‘ oder ‚Nein‘ richtig ist, hängt davon ab, wie die Schülerinnen und Schüler ihre Entscheidung begründen.

Abweichende Lösungsvorschläge der Schülerinnen und Schüler können zum Argumentieren anregen.

Station 7: Schätz ab!

Fermi-Aufgaben¹ öffnen den Unterricht und leiten Schülerinnen und Schüler sowohl zu selbstständigem als auch zu kooperativem Lernen an und fördern so die Kommunikation im Unterricht. Sie fordern heraus und öffnen den Blick für die Mathematik in ihrer Umwelt.

Bei dieser Aufgabe gibt es viele richtige Lösungen. Interessant ist neben dem Ergebnis die Vorgehensweise der Schülerinnen und Schüler. Dazu bekommen sie in der Lösungskontrolle folgende Reflexionsfragen:

- Habt ihr jeden eurer Finger einzeln gemessen?
- Wie habt ihr die Messung vorgenommen?
- In welcher Längeneinheit habt ihr die Finger gemessen? Ist das sinnvoll?
- Habt ihr die Finger aller Schülerinnen und Schüler gemessen? Ist das nötig?
- Was habt ihr gerechnet?

Ein abschließender Vergleich der einzelnen Gruppenergebnisse erscheint sinnvoll. Zum einen werden die Schülerinnen und Schüler zum sachgerechten Argumentieren herausgefordert, zum anderen trägt dies wesentlich zu einer zufriedenstellenden Klärung hinsichtlich der Akzeptanz verschiedener Lösungsvorschläge bei.

¹ Fermi-Aufgaben beziehen sich in der Regel auf Alltagssituationen und enthalten nicht alle für eine exakte rechnerische Lösung benötigten Informationen. Zur Lösung müssen deshalb Größen auf Grund von Alltagserfahrungen abgeschätzt werden. Die ermittelten Lösungen können dementsprechend nicht exakt sein, müssen aber die richtige Größenordnung haben.

Lösungen zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels:

Station 1: Zieh ab!

Weitere Beispiele:

- a) $179 \rightarrow 971 - 179 = 792 \rightarrow 972 - 279 = 693 \rightarrow 963 - 369 = 594 \rightarrow 954 - 459 = 495$
 $\rightarrow 954 - 459 = 495$ – fertig!
- b) $444 \rightarrow 444 - 444 = 0$ – fertig!

- Ihr solltet festgestellt haben, dass unabhängig von der Ausgangszahl in jedem Fall (Ausnahme: 3 gleiche Ziffern) das Ergebnis 495 erreicht wird und sich ab da nichts mehr ändert.

Das hättet ihr außerdem noch entdecken können:

- die Quersummen aller Differenzen betragen immer 18
- die Zehnerziffer aller Differenzen ist stets 9, die Summe der Einer- und Hunderterziffern ergibt immer 9
- um zum Ergebnis 495 zu kommen, sind maximal 5 Schritte erforderlich
- als Differenzen ergeben sich immer Vielfache von 99

Station 2: Leg um!

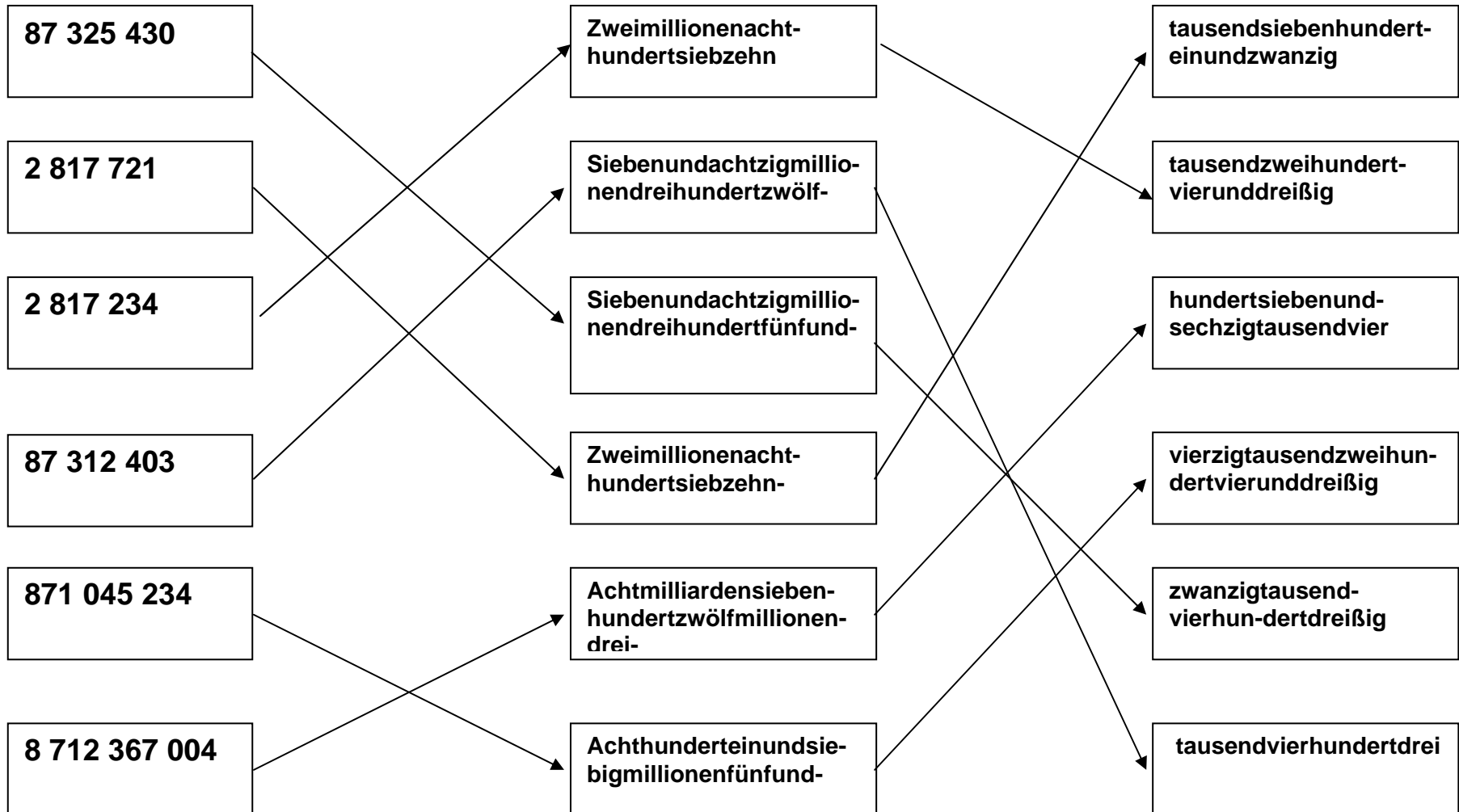
6	59	4	209	13
---	----	---	-----	----

Sechshundertneunundfünfzigmillionenvierhundertzwanzigtausendneunhundertdreizehn

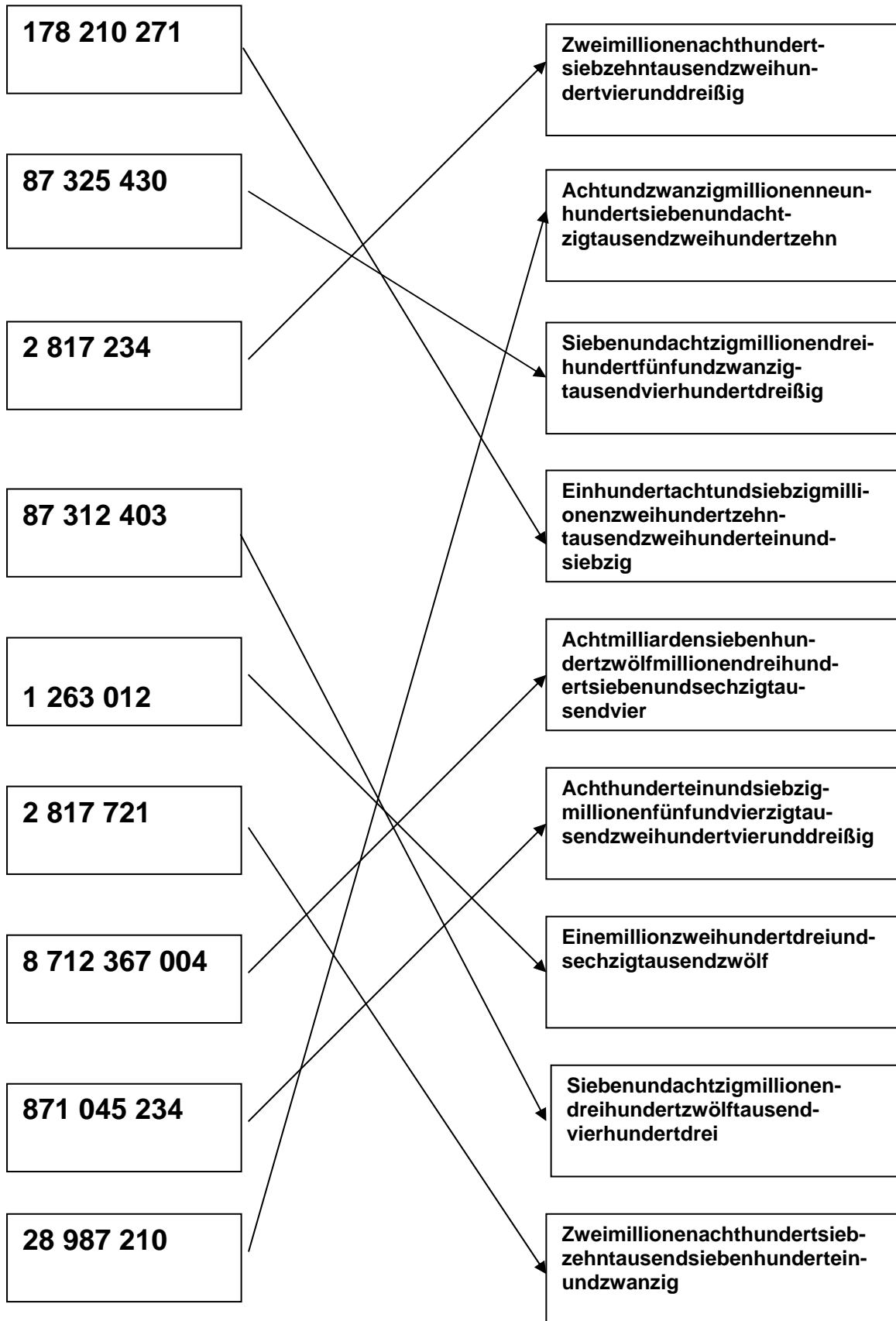
Station 3: Wirf hin!

Spiel: Ausgang abhängig von den gewürfelten Zahlen.

Station 4a: Zieh Leine!

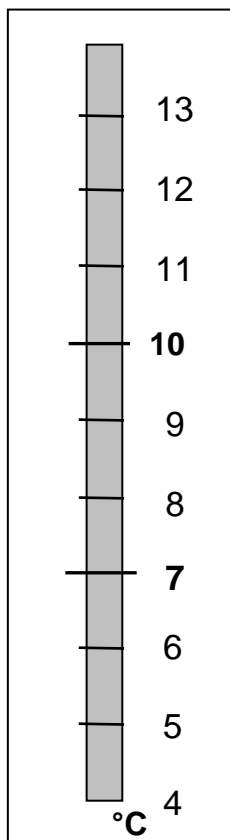


Station 4b: Zieh Leine!

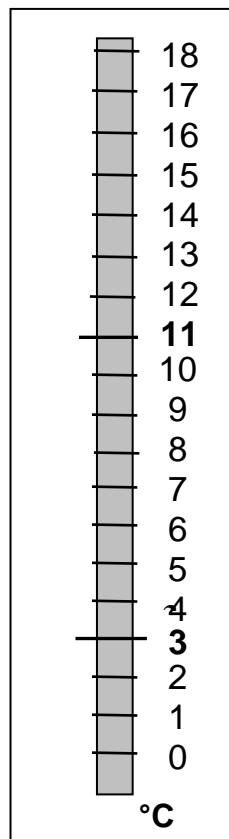


Station 5: Teil ein!

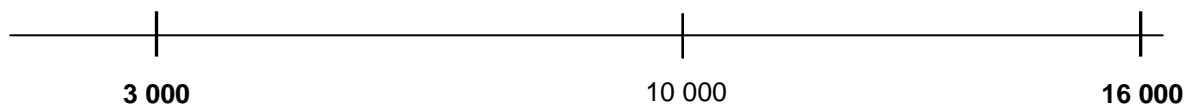
1a) 1°C entspricht 1cm



1b) 1°C entspricht 0,5 cm



2. 1000 entspricht 1cm



Station 6: Runde sinnvoll!

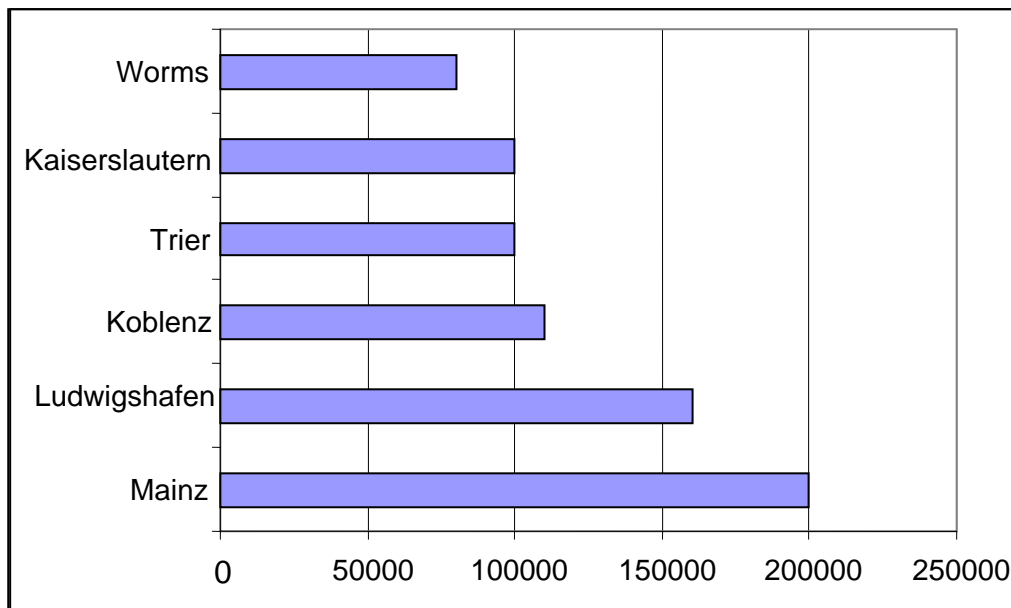
a) Ob deine Antwort „Ja“ oder „Nein“ richtig ist, hängt davon ab wie du deine Entscheidung begründest.

Mögliche Lösung:

	Ja	Nein
Der VfL Wolfsburg wurde in der Saison 2008/09 mit 69 Punkten und 80:41 Toren nach 34 Spielen deutscher Fußballmeister.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
Andorra hat 83 137 Einwohner.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
Der Rhein ist 1 324 km lang.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
Bis zum 18.06.09 sind 1 617 827 Anträge zum Abwracken eines PKW eingegangen.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

b) Lösungsvorschlag:

Mainz	200 000
Ludwigshafen	160 000
Koblenz	110 000
Trier	100 000
Kaiserslautern	100 000
Worms	80 000



Station 7: Schätz ab!

Hier gibt es viele richtige Lösungen. Beschreibt eure Vorgehensweise, indem ihr folgende Fragen beantwortet:

- Habt ihr jeden eurer Finger einzeln gemessen?
- Wie habt ihr die Messung vorgenommen?
- In welcher Längeneinheit habt ihr die Finger gemessen? Ist das sinnvoll?
- Habt ihr die Finger aller Schülerinnen und Schüler gemessen? Ist das nötig?
- Was habt ihr gerechnet?

Station 8: Summ los!

Die Quersummensumme aller Zahlen von 1 bis 1000 ist 13 501.

Zu diesem Ergebnis gelangt man entweder mühsam „zu Fuß“, indem man die Quersummen aller Zahlen von 1 bis 1000 einzeln berechnet und diese dann addiert.

Glücklicherweise gibt es auch geschicktere Vorgehensweisen:

Die eleganteste Variante ist die folgende:

Die höchste Zahl, also 1000, wird zunächst weggelassen und dann werden Paare gebildet.

1. Summand		2. Summand	Quersumme
0	+	999	$3 \cdot 9 = 27$
1	+	998	$3 \cdot 9 = 27$
2	+	997	$3 \cdot 9 = 27$
3	+	996	$3 \cdot 9 = 27$
...	+	...	$3 \cdot 9 = 27$
10	+	989	$3 \cdot 9 = 27$
11	+	988	$3 \cdot 9 = 27$
...	+	...	$3 \cdot 9 = 27$
499	+	500	$3 \cdot 9 = 27$

Auf diese Weise lassen sich 500 Paare bilden, die jeweils die Quersumme 27 besitzen. Hinzu kommt noch die Quersumme von 1 000; und die ist 1.

Also insgesamt beträgt die Quersummensumme: $27 \cdot 500 + 1 = 13\,501$

Daneben gibt es viele weitere geschickte Möglichkeiten, die Quersummensumme (QS) zu bilden – hier noch ein Beispiel:

Die QS von $1, 2, \dots, 9 = 45$
Dann ist die QS von $10, 11, \dots$; $19 = 45 + 10 \cdot 1$
und die QS von $20, 21, \dots, 29 = 45 + 10 \cdot 2$
und ...
und die QS von $90, 91, \dots, 99 = 45 + 10 \cdot 9$.

Die QS von 1 bis 99 beträgt demnach $10 \cdot 45 + 10 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 10 \cdot 45 + 10 \cdot 45 = 900$.

Dann ist die QS von 100 bis $199 = 900 + 100 \cdot 1$,
diejenige von 200 bis $299 = 900 + 100 \cdot 2$,
.....
diejenige von 900 bis $999 = 900 + 100 \cdot 9$.

Die Quersummensumme von 1 bis 999 ist folglich:

$10 \cdot 900 + 100 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 10 \cdot 900 + 100 \cdot 45 = 13.500$. Es fehlt noch die QS von 1000, also 1.

Insgesamt ergibt sich also 13 501.

Station 9: Spiegel mich!

- a) Es gibt 90 dreistellige Palindrome.

Eine mögliche Begründung: Für die Hunderter der gesuchten Palindrome stehen 9 Ziffern zur Verfügung (die 0 scheidet aus), die Einer sind damit durch diese Wahl (gleiche Ziffer) festgelegt. Für die Zehner sind dann alle 10 Ziffern erlaubt; insgesamt gibt es also $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ verschiedene dreistellige Palindrome.

Selbstverständlich kann die Bestimmung der Anzahl auch dadurch erfolgen, dass man erst einmal alle Palindrome von 100 bis 199 ermittelt, dann diejenigen zwischen 200 und 299 usw.

- b) Es gibt drei dreistellige Palindrome, die zugleich Quadratzahlen sind.

Mögliche Begründungen:

- a. Ausgehend von den Palindromen: Soll das gesuchte Palindrom auf 1 enden, kann die zu quadrierende Zahl selbst nur auf 1 oder 9 enden. Da aber auch die Hunderterziffer in diesem Fall eine 1 sein muss, kommt nur $11^2 = 121$ in Frage.

Da es keine Quadratzahlen gibt, die auf 2, 3, 7 oder 8 enden, scheidet alle Palindrome mit der Hunderterziffer 2, 3, 7 und 8 aus. Folglich brauchen alle Palindrome zwischen 200 und 399 sowie zwischen 700 und 899 nicht mehr betrachtet zu werden.

Überprüft man die noch verbleibenden Endziffern (4, 5, 6 und 9), dann ergeben sich nur noch $22^2 = 484$ und $26^2 = 676$ als Quadratzahl-Palindrome.

Alternativ kann man natürlich auch die in a) ermittelten 90 in Frage kommenden Palindrome einzeln auf Quadratzahlen überprüfen.

- b. Ausgehend von den Quadratzahlen: Man ermittelt die dreistelligen Quadratzahlen (am besten mit Taschenrechner), das sind die zwischen 10^2 und 31^2 . Dann überprüft man, welche davon Palindrome sind.

Natürliche Zahlen - Kompetenzen

	Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)
Station 1	<p>K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: Routineverfahren verwenden</p> <p>falls Taschenrechner erlaubt ist: AB I: mathematische Werkzeuge in Situationen nutzen, in denen ihr Einsatz geübt wurde</p> <p>K1: Mathematisch argumentieren AB II: Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern</p>
Station 2	<p>K2: Probleme lösen AB I: einfache Probleme mit bekannten Verfahren lösen</p> <p>K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II: symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt</p>
Station 3	<p>K2: Probleme lösen AB I: Routineaufgaben lösen („sich zu helfen wissen“)</p>
Station 4	<p>K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II: symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt</p> <p>K2: Probleme mathematisch lösen AB I: Routineaufgaben lösen („sich zu helfen wissen“)</p>
Station 5	<p>K4: Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen</p> <p>K2: Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert</p>
Station 6	<p>a) K6: Kommunizieren AB I: aus kurzen, einfachen mathemathikhaltigen Texten Informationen entnehmen</p> <p>K3: Mathematisch modellieren AB I: einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen</p> <p>b) K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: Routineverfahren verwenden</p> <p>K4: Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen</p>

Station 7	<p>K3: Mathematisch modellieren AB III: Komplexe oder unvertraute Situationen modellieren</p> <p>K2: Probleme lösen AB I: einfache Probleme mit bekannten – auch experimentellen – Verfahren lösen</p> <p>K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: Routineverfahren verwenden</p> <p>K6: Kommunizieren ABII: Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse verständlich darstellen</p>
Station 8	<p>K2: Probleme lösen AB III: Anspruchsvolle Probleme bearbeiten</p> <p>K1: Mathematisch argumentieren AB II: Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern</p> <p>K6: Kommunizieren AB III: komplexe mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich präsentieren</p>
Station 9	<p>a) K2: Probleme lösen AB III: Anspruchsvolle Probleme bearbeiten</p> <p>K1: Mathematisch argumentieren AB II: Lösungswege beschreiben und begründen</p> <p>b) K2: Probleme lösen AB III: Anspruchsvolle Probleme bearbeiten</p> <p>K5: mathematisch Werkzeuge verständlich auswählen und einsetzen</p>

Offene Aufgabe „Fünf mal fünf“

Methodische Hinweise

1. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch geschicktes Verknüpfen der Ziffer 5 mit den bekannten Rechenzeichen sowie dem Setzen von Klammern unter Beachtung der Punkt-vor-Strich-Regel Darstellungen für die Zahlen 0 bis 9 finden. Dementsprechend sind die Grundrechenarten sowie die Rechengesetze und insbesondere die Punkt-vor-Strich-Regel als Vorkenntnisse zwingend erforderlich.

Bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern sollte diese vorher noch einmal wiederholt werden, da hierbei die meisten Fehler gemacht werden.

2. Die Aufgabe kann ab Klassenstufe 5 zur Übung und Festigung eingesetzt werden. Der Wettkampfcharakter führt zum spielerischen Umgang mit den Rechengesetzen.
3. Variationsmöglichkeiten:
 Zur Erhöhung des Schwierigkeitsgrades können auch bestimmte Vorgaben gemacht werden:

- ohne Klammern,
- Rechenzeichen einschränken,
- jedes Rechenzeichen nur einmal verwenden,
- Potenzen erlauben,
- Bruchstrich erlauben,
- Zahlen aus mehreren gleichen Ziffern wie 55 oder 555 ausschließen.

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können selbst Variationen erfinden, indem man sie auffordert, Bedingungen der Aufgabenstellung zu ändern.

Mögliche Lösungen:

- a) weitere Lösung für die Zahl 6: $5 \cdot 5 : 5 + (5 : 5)$
- b) Darstellungen für 0 bis 9:

$[(5 : 5 \cdot 5) - 5] \cdot 5$	0
$(5 - 5) \cdot 5 + (5 : 5)$	1
$(55 - 5) : 5 : 5$	2
$(5 \cdot 5 - 5 - 5) : 5$	3
$(5 + 5 + 5 + 5) : 5$	4

$(55 - 5) : (5 + 5)$	5
$(55 - 5 \cdot 5) : 5$	6
$(5 : 5) + (5 : 5) + 5$	7
$[(5 + 5 + 5) : 5] + 5$	8
$(5 \cdot 5 - 5) : 5 + 5$	9

Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)

K2: Probleme lösen

AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert

K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

AB I: Routineverfahren verwenden

Offene Aufgabe „Restposten“

Methodische Hinweise

1. Erforderliche Vorkenntnisse:

- Division mit Rest und Begriff der Quadratzahl unabdingbar
- Teilbarkeitsregeln sowie Aufstellen und Rechnen mit Termen notwendig für Lösung auf höherem Niveau

2. Je nach angestrebtem Niveau der Bearbeitung ist die Aufgabe bereits ab Klasse 5 möglich. Die Aufgabe dient zur Einübung und Festigung der oben angegebenen Lerninhalte.

Lösung

Susis Behauptung stimmt tatsächlich immer.

Der Nachweis ist auf verschiedenen Niveaus möglich:

- a) Erhärtung des „Verdachts“ durch weitere Beispiele.
- b) Endzifferbetrachtung: Die angesprochenen Zahlen mit Rest 3 enden alle entweder auf 3 oder 8, die zugehörigen Quadratzahlen folglich auf $3^2=9$ bzw. $8^2=(6)4$ – in jedem Fall ergibt sich Rest 4.
- c) Term aufstellen: $n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 = (5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = (25k^2 + 30k + 5) + 4 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$.

Der erste Summand ist ein Vielfaches von 5, also ergibt sich stets der Rest 4.

Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)

K2: Probleme lösen

AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert

K1: Mathematisch argumentieren

AB III: komplexe Argumentationen entwickeln

Offene Aufgabe „Wieg schlau!“

Methodische Hinweise

1. Mit der Beherrschung der Grundrechenarten ist diese Aufgabe lösbar. Bei Teil a) gelangt man durch sinnvolles Probieren zu den geforderten Darstellungen. Will man jedoch Teil b) bis hin zur Bestimmung des größtmöglichen Gewichtsstückes erfolgreich bearbeiten, so sind komplexe mathematische Überlegungen notwendig.
2. Je nach angestrebtem Niveau der Bearbeitung ist die Aufgabe bereits ab Klasse 5 zur Übung möglich und eignet sich besonders für die Erarbeitung in Gruppen.

Die Aufgabe ist ab Teil b) offen. Teil a) ist zur Erkennung des Prinzips notwendig.

Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass alle Gewichte bis 9g lückenlos darstellbar sind, 10g aber nicht – 11g, 13g und 15g sind jedoch auch noch zu erreichen. Die Vermutung liegt nahe, ein **10g**-Gewichtsstück hinzuzunehmen. Mit diesem 10g-Gewicht endet die Reihe bei 19g (9g + 10g).

Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sollen nun aus der Aufgabenstellung folgern, dass es auch schwerere geeignete Gewichtsstücke geben muss.

Da die 10g allerdings nicht mit den bisher vorhandenen 3 Gewichten darstellbar sind, müssen die 10g als Differenz von dem neuen Gewichtsstück und den bisher darstellbaren Gewichten zu erreichen sein:

$$10g = x - 1g, \text{ also } x = \mathbf{11g} \text{ und damit max. } 20g \text{ abwiegbare (} 11g + 9g = 20g \text{)}$$

$$10g = x - 2g, \text{ also } x = \mathbf{12g} \text{ und damit max. } 21g \text{ abwiegbare (} 12g + 9g = 21g \text{)}$$

...
...

$$10g = x - 9g, \text{ also } x = \mathbf{19g} \text{ und damit max. } 28g \text{ abwiegbare (} 19g + 9g = 28g \text{)}$$

Damit sind folglich bis zu 19g + 9g = 28g lückenlos darstellbar.

Achtung: Man kommt damit aber nicht lückenlos zu 19g + 2g + 6g + 7g = 34g!

Da mit den alten Gewichtsstücken auch 11g, 13g und 15g abwiegbare sind (s. Tabelle), kann man versuchen, die gewünschten 10g mit deren Hilfe aus der bereits bekannten Differenz zu erzeugen:

$$10g = x - 11g, \text{ also } x = \mathbf{21g} \text{ und damit max. } 30g \text{ abwiegbare (} 21g + 9g = 30g \text{)}$$

$$10g = x - 13g, \text{ also } x = \mathbf{23g} \text{ und damit max. } 32g \text{ abwiegbare (} 23g + 9g = 32g \text{)}$$

$$10g = x - 15g, \text{ also } x = \mathbf{25g} \text{ und damit max. } \mathbf{34g} \text{ abwiegbare (} 25g + 9g = 34g \text{)}$$

Um einzusehen, dass auch diese drei Gewichtsstücke geeignet sind, damit ein lückenloses Wiegen bis zu (x+9)g ermöglicht wird, genügt nicht mehr wie vorher die Erkenntnis, dass damit zusätzlich zu den Gewichten 1g bis 9g alle Gewichte von (x-9)g bis (x+9)g bestimmt werden können. Hier ist es vielmehr so, dass durch die Differenz aus dem neuen Gewichtsstück und einer der möglichen Darstellungen >9g (also 11g, 13g und 15g) auch genau die Werte erreicht werden, die vorher nicht darstellbar waren (10g, 12g, 14g), z.B.: 25g – 15g = 10g bzw. 25g – 13g = 12g bzw. 25g – 11g = 14g.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass mit einem vierten Gewichtstück von maximal 25g alle Gewichte bis zu 34g lückenlos abwiegbare sind.

Lösung

a)

Zu wiegen (x)	Linke Waagschale		Rechte Waagschale
1g	$6 + x$	▲	7
2g	x	▲	2
3g	$6 + x$	▲	$7 + 2$
4g	$2 + x$	▲	6
5g	$2 + x$	▲	7
6g	6	▲	x
7g	7	▲	x
8g	$6 + 2$	▲	x
9g	$2 + 7$	▲	x
10g	Nicht möglich	▲	Nicht möglich
11g	$6 + 7$	▲	$x + 2$
12g	Nicht möglich	▲	Nicht möglich
13g	$6 + 7$	▲	x
14g	Nicht möglich	▲	Nicht möglich
15g	$7 + 6 + 2$	▲	x

b) Mögliche Lösungen: 2g, 6g, 7g, **10g** bis max. 19g
 2g, 6g, 7g, **19g** bis max. 28g
 2g, 6g, 7g, **25g** bis max. 34g
 (weitere Lösungen möglich – vgl. Methodische Hinweise)

Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)

- a) K2: Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert
- b) K2: Probleme lösen AB III: Anspruchsvolle Probleme bearbeiten
- K3: Mathematisch modellieren AB III: Komplexe oder unvertraute Situationen modellieren
- K1: Mathematisch argumentieren AB III: komplexe Argumentationen entwickeln.

Ganze Zahlen

*Verantwortlich für Aufgaben und Kommentare:
Ralf Früholz, Ottmar Hofmann, Petra Neymeyr, Georg Schmitt*

Methodische Hinweise zum Lernzirkel

Voraussetzung ist, dass die Schülerinnen und Schüler die negativen Zahlen auf der Zahlengerade kennen gelernt haben und mit Zustandsänderungen rechnen können. Die Aufgaben dienen der Sicherung und Festigung des bereits Erlernten.

Darüber hinaus sind viele Aufgaben auch zur Differenzierung geeignet.

Pflichtstationen:

- Station 1 Das magische Kreuz
- Station 2 Temperaturen über und unter 0°C
- Station 3 Punkte im Koordinatensystem
- Station 4 Besuch aus dem Weltraum
- Station 5 Baumarkt Kachelturn
- Station 6 1,2,3,4 natürliche Zahlen
- Station 7 Mathemagie

Wahlstationen:

- Station 8 Spirale
- Station 9 Beratung im Elektrogeschäft
- Station 10 Punkte im Koordinatensystem
- Station 11 Achtung geheim!
- Station 12 Die gesuchte Zahl
- Station 13 Bekannte Seen auf der Erde

Zu den Aufgaben sind weitere Differenzierungsmöglichkeiten angegeben, die die Lehrkraft je nach Lerngruppe einsetzen kann. Die Schwierigkeit des Lernzirkels kann durch Veränderung der Einteilung der Stationen in Pflicht- und Wahlstationen an das Leistungsvermögen der Lerngruppe angepasst werden. Ferner können einzelne Stationen gestrichen oder durch andere Arbeitsaufträge ersetzt werden (z.B. Aufgaben aus dem Schulbuch). Auch die Änderung von Zahlenwerten oder die Angabe zusätzlicher Fragen kann hilfreich sein. Wichtig ist, dass die Arbeitsanweisungen selbst erklärend sind.

Methodische Hinweise zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

Station 1: Das magische Kreuz

Diese Station ist einsetzbar ab Klassenstufe 6 und ist auch gleichzeitig eine Möglichkeit zur Wiederholung in höheren Klassenstufen. Besonders bei Nr. 2 führt das Verständnis der Gegenzahl zu dem Ergebnis. Nr. 3 ist eine Vertiefung des Verständnisses aus Nr. 2, denn die Position der Zahl -3 nicht an einer Außenposition im magischen Dreieck führt dann über die Gegenzahlen zur Lösung. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich selbst Aufgaben im magischen Dreieck ausdenken und ihrer Tischgruppe zur Bearbeitung vorlegen.

Station 2: Temperaturen über und unter 0° C

Das Thermometer impliziert die Darstellung rationaler Zahlen am Zahlenstrahl. Die Anordnung der Temperaturen auf der Skala "kalt – 0°C – warm" unterstützt die Vorstellung der Schülerinnen und Schüler von der Zahlengeraden, auf der die Zahlen um so größer sind, je weiter sie rechts liegen.

Der Temperaturunterschied als zwingend positive Größe (Aufgabe 3) lässt die Schülerinnen und Schüler eigenständig die Definition des Betrags einer Zahl entdecken. Die Definition kann von den Schülerinnen und Schülern selbst formuliert werden, die Schreibweise wird von der Lehrkraft vorgegeben.

Station 3: Punkte im Koordinatensystem

Die Einführung der negativen Zahlen ermöglicht die Erweiterung des Koordinatensystems auf vier Quadranten.

Station 4: Besuch aus dem Weltraum

Die Station ist für die Bearbeitung in Einzelarbeit gedacht. Die Schülerinnen und Schüler sollten mit den ganzen Zahlen an einem Thermometer oder auf der Zahlengeraden vertraut sein. In der Vorlage ist der Zahlenbereich recht einfach gehalten. Je nach Lerngruppe lässt sich der Zahlenbereich variieren und an den Leistungsstand anpassen.

Als Fortführung können in Partnerarbeit weitere Profilpläne gezeichnet oder Anweisungen aufgeschrieben werden, nach denen ein Profil zu zeichnen ist. Ein kariertes Blatt ist zum Aufzeichnen des Profils sinnvoll.

Station 5: Baumarkt Kachelturn

Die Station lässt sich in Einzel- und in Partnerarbeit lösen. Einerseits kann man ein Kachelmuster vorgeben und lässt die Schülerinnen und Schüler den erforderlichen „Einkaufszettel“ zusammenstellen. Andererseits kann man auch einen Einkaufszettel vorgeben und lässt die Schülerinnen und Schüler das Muster auf einem karierten Blatt (siehe Anlage) einzeichnen.

Sollen nur „Einkaufszettel“ erstellt werden, benötigt man die Punkte an den Kacheln nicht. Es werden zusätzliche Anforderungen an das Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler gestellt, wenn die Kacheln noch gedreht werden müssen. Soll zu einem „Einkaufszettel“ ein Muster erstellt werden, dienen die Punkte zum Herstellen einer eindeutigen Lösung.

Von den Schülerinnen und Schülern selbst erstellte Muster lassen sich in Partnerarbeit kontrollieren.

Um eigene Aufgaben zu erstellen, findet man in der Anlage 1 „Kacheln“, die man selbst zu Mustern zusammengestellt kann.

Will man den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, eigene Muster zu zeichnen oder zu legen, kann man die Vorlagen 2 und 3 benutzen. Vorlage 3 sollte laminiert werden.

Lässt man die Markierungspunkte weg, gibt es noch weitere Möglichkeiten „Kacheln“ zu zeichnen und Muster zu erfinden. Die Kontrolle des „Musters“ nach dem „Einkaufszettel“ wird allerdings schwieriger.

Station 6: 1,2,3,4 natürliche Zahlen

Die Station lässt sich in Einzel- und in Partnerarbeit bearbeiten. Lernvoraussetzung ist, dass die Schülerinnen und Schüler Aufgaben der Form $4 - 5 + 6 - 7$ u.ä. lösen können. Setzt man die Lernstation als Wiederholung im 7. oder 8. Schuljahr ein, kann man auch die Formel herleiten und die Beobachtungen begründen. Die Lernstation eignet sich auch, um eine Tabellenkalkulation zur Kontrolle der Ergebnisse einzusetzen. Das Tabellenblatt kann man vorgeben oder von den Schülerinnen und Schülern selbst entwickeln lassen.

Variationen der Aufgabe

Die Schülerinnen und Schüler können selbst Variationen überlegen; die Lehrkraft kann aber auch entsprechend der Leistungsfähigkeit verschiedene Aufgabenstellungen vorgeben.

Beispiele:

- Statt vier Zahlen drei oder fünf Zahlen nehmen.
- Auch vor der ersten Zahl darf ein „+“ oder „-“ stehen.
- Statt natürlicher Zahlen kann man auch ganze Zahlen oder Bruchzahlen (mit vorgegebener Differenz) zulassen. (Bitte beachten Sie, dass Aufgaben der Form $(+ 4) - (+5)$ im Rahmenlehrplan erst für das 7. Schuljahr gefordert werden.)

Am besten beginnt man in Partnerarbeit mit zwei Tabellen und zwei verschiedenen Startzahlenfolgen. Die Schülerinnen und Schüler erstellen, lösen und vergleichen die Aufgaben. Je nach Lerngruppe kann man die Tabelle vorgeben oder den Schülerinnen und Schüler selbst überlassen, eine Strategie zur übersichtlichen Lösung zu entwickeln.

Mögliche Beobachtungen können sein:

- Es kommen nur gerade Zahlen vor.
- In jeder Tabelle kommen drei negative, vier positive Zahlen und die 0 vor.
- In allen Tabellen kommen 0, -2 und -4 vor.

Statt 4 aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, kann man auch aufeinanderfolgende gerade Zahlen, durch 3 teilbare Zahlen usw. nehmen.

Je nach Leistungsstärke der Lerngruppe oder einzelner Schülerinnen und Schüler kann man eine Tabellenkalkulation (Blatt mit Formeln vorgeben oder selbst entwerfen lassen) zur Überprüfung der Ergebnisse einsetzen.

Station 7: Mathemagie

Einige Begriffserklärungen: n gibt die Anzahl der Zeilen und Spalten im Quadrat an und wird häufig als Ordnung des magischen Quadrates bezeichnet.

Wenn im Folgenden von magischen Quadraten der Ordnung n die Rede ist, sind damit magische Quadrate im erweiterten Sinne gemeint. D. h. Es dürfen auch andere Zahlen als nur die Zahlen von 1 bis n^2 vorkommen; außerdem dürfen manche Zahlen mehrmals vorkommen.

Als magische Zahl oder magische Summe bezeichnet man den Wert der Summe, den man erhält, wenn man alle Zahlen einer Zeile, einer Spalte oder einer Diagonalen addiert.

Weiterführende Hinweise

Informationen über die Geschichte magischer Quadrate, mathematische Hintergründe und Algorithmen und Programme zum Erstellen magischer Quadrate findet man u. a. auf folgenden Seiten im Internet (Stand Ende Juni 2009)

<http://www.mathematische-basteleien.de/magquadrat.htm>

<http://www.theofel.de/magic/einfuehrung.html>

http://www.theofel.de/magic/quadrat_generieren.html (Erzeugen magischer Quadrate beliebiger Ordnung mit beliebiger Startzahl)

<http://www.hbmeyer.de/> (Erzeugen magischer Quadrate der Ordnung 4, 5 und 6 mit zusätzlichen Bedingungen)

<http://ima.epfl.ch/~dmessina/magic-square-generator.html> (Programm zum Erzeugen magischer Quadrate bis zur Ordnung 17 als Offline-Version (Ausgabe als .txt und .xls-Datei) und als Online-Version (benötigt Java))

<http://www.lehrer-online.de/magische-quadrate.php> (Ausführliche Unterrichtseinheit über magische Quadrate mit Anleitung, wie sich magische Quadrate selbst erstellen lassen.)

<http://www.schule->

[bw.de/unterricht/faecher/mathematik/5interaktiv/das_magische_quadrat](http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/5interaktiv/das_magische_quadrat) (Kostenloses Programm um 4x4-Quadrate am Computer zu lösen. Der Schwierigkeitsgrad lässt sich einstellen.)

<http://www.mathe-online.at/materialien/maria.koth/> („Magische Quadrate im Mathematikunterricht“ und „Aufgaben zu magischen Quadraten“: umfangreiche Aufgabenstellungen zu magischen Quadraten.)

Mit den o. a. Internetseiten und den dort vorhandenen Programmen lassen sich magische Quadrate erstellen. Wenn man bei jeder Zelle die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert oder die Zelle mit der gleichen Zahl multipliziert oder dividiert erhält man wieder magische Quadrate.

Tipp: Soll mit Brüchen gerechnet werden, müssen bei der Division die Zellen im Tabellenblatt im Format „Bruch – zweistellig“ formatiert sein. Beim Rechnen mit Dezimalzahlen sollte auf eine sinnvolle Anzahl der Nachkommastellen geachtet werden.

Station 8: Spirale

1. Diese Aufgabe ist einsetzbar ab Klassenstufe 6 und ermöglicht die vertiefende Behandlung des Koordinatensystems auf vier Quadranten.
2. Kann durch das direkte Eintragen in die Skizze gefunden werden.
3. Erfordert eine systematische Überlegung, dass die Punkte 4,8,12,16,20 alle im 2. Quadranten sind.
4. Ist als Erweiterung von Aufgabe 3 die anspruchsvollere Version. In Ergänzung zu Aufgabe 3 kann die Lösung auch durch systematisches Zeichnen herausgefunden werden.

Station 10: Punkte im Koordinatensystem

Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst die Koordinaten ablesen. In den Teilen b) – d) können sie anschließend Einsicht gewinnen in die Veränderung der Punktkoordinaten sowohl in Abhängigkeit von einer Achsenspiegelung an den Koordinatenachsen als auch von einer Punktspiegelung am Ursprung. Hier wird auch der Betrag einer Zahl als ihr Abstand vom Ursprung veranschaulicht.

Station 11: Achtung geheim!

Diese Station ist zur Bearbeitung in Partnerarbeit gedacht. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich bereits einigermaßen sicher auf der Zahlengeraden „bewegen“ können.

Station 13: Bekannte Seen auf der Erde

Die Schülerinnen und Schüler sollten den Begriff NN (Normalnull: Mittlere Höhe des Meeresspiegels) kennen.

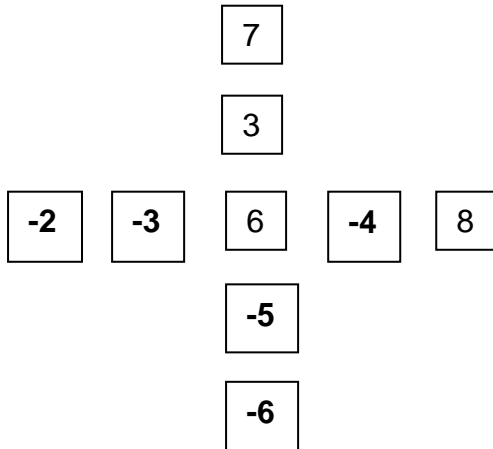
Die Aufgabe kann ab der Klassenstufe 5 eingesetzt werden. Die Aufgabe kann als Einzel- oder Partnerarbeit eingesetzt werden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich mit Hilfe des Atlas selbst Aufgaben überlegen und dem Partner zur Bearbeitung vorlegen.

Lösungen zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

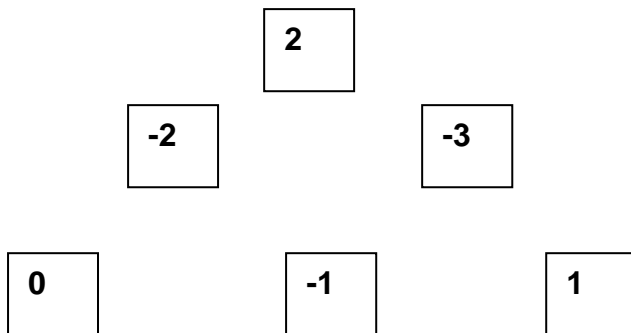
Station 1: Das magische Kreuz

Nr. 1:



Nr. 2: 0 in der Mitte, Gegenzahlen immer gegenüber.

Nr. 3: Eine mögliche Lösung



Station 2: Temperaturen über und unter 0° C

Zu 1) Schreibe die Temperaturen auf:

Hamburg: 8°C; London: 0°C; Madrid: 10°C; Moskau: -9,5°C;
 Stockholm: - 7,5°C; Warschau: -4,5°C

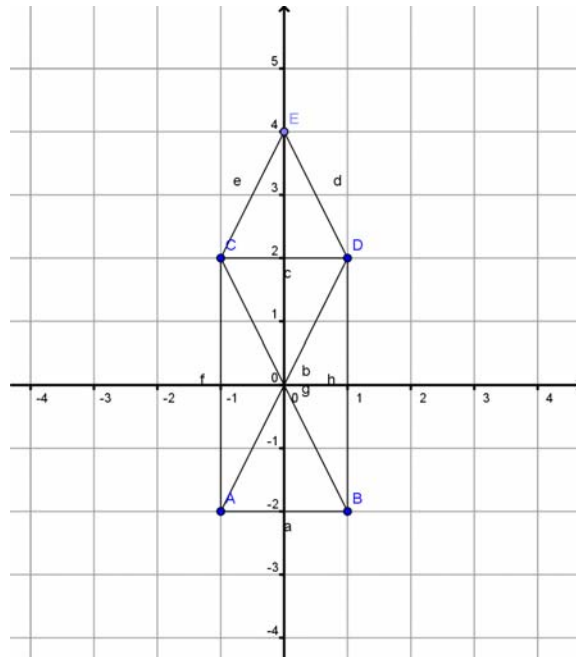
Zu 2) Ordne die Temperaturen der Größe nach: $-9,5^{\circ}\text{C} < -7,5^{\circ}\text{C} < -4,5^{\circ}\text{C} < 0^{\circ}\text{C} < 8^{\circ}\text{C} < 10^{\circ}\text{C}$

Zu 3: Trage die Temperaturunterschiede zwischen den Orten in die Tabelle ein:

Temperaturunterschiede zwischen:	Stockholm	Hamburg	Warschau	London
Madrid	2,5°C	2°C	5,5°C	10°C
Moskau	2°C	1,5°C	5°C	9,5°C

Station 3: Punkte im Koordinatensystem

Das Haus vom Nikolaus:



Station 4: Besuch aus dem Weltraum

Für das vorgegebene Profil gelten folgende Anweisungen:

+ 30; + 20; - 80; - 30; - 30; + 50; +30; + 20; + 70; - 50

Station 5: Baumarkt Kachelturn

Stock	Fahrt
0	Du steigst im Erdgeschoss in den Aufzug ein!
-6	-6
-2	+4
5	+7
4	-1
0	-4
-1	-1
-1	0
-5	-4

Stock	0	-4	1	0	-1	0	1	-3	-6
Fahrt	Einstieg	-4	5	-1	-1	+1	+1	-4	-3

Station 6: 1,2,3,4 natürliche Zahlen

Lösung am Beispiel der Zahlen 5 ① 6 ② 7 ③ 8 und allgemein für $n, n+1, n+2, n+3$ (Die erste Zahl wird mit n bezeichnet)

①	②	③	Wert	Formel
+	+	+	26	$4n+6$
+	+	-	10	$2n$
+	-	+	12	$2n+2$
+	-	-	-4	-4
-	+	+	14	$2n+4$
-	+	-	-2	-2
-	-	+	0	0
-	-	-	-16	$-2n-6$

Station 7: Mathemagie

Aufgabe 1

- a) kein magisches Quadrat
 c) kein magisches Quadrat

- b) magisches Quadrat (magische Summe: 14)
 d) magisches Quadrat (magische Summe: -4)

Aufgabe 2

- a) Magische Summe = 16

19	-9	-7	13
-3	9	7	3
5	1	-1	11
-5	15	17	-11

- b) Magische Summe = 20

20	-8	-6	14
-2	10	8	4
6	2	0	12
-4	16	18	-10

- c) Magische Summe: 20

35	-21	-17	23
-9	15	11	3
7	-1	-5	19
-13	27	31	-25

- d) Magische Summe: -16

26	-30	-26	14
-18	6	2	-6
-2	-10	-14	10
-22	18	22	-34

Aufgabe 3

- a) Magisches Quadrat (magische Summe: 15)
 b) Ist kein magisches Quadrat: Zeilensumme in 1., 3., 4. und 6. Zeile ergibt -9; andere Zeilen und Spalten ergeben andere Werte.

Aufgabe 4

- a) Die magische Summe ist $72 : 4 = 18$
 b) Hier musst du eine negative Zahl durch eine positive Zahl dividieren. Die Summe aller Zahlen ist -24. Das heißt, die magische Summe ist $-24 : 4 = -6$

a)

12	-2	-1	9
1	7	6	4
5	3	2	8
0	10	11	-3

b)

6	-8	-7	3
-5	1	0	-2
-1	-3	-4	2
-6	4	5	-9

Lösungen zu den Wahlstationen

Station 8: Spirale

2. $(3 / -2)$
3. $(-5 / 5)$
4. $(-25 / 25)$

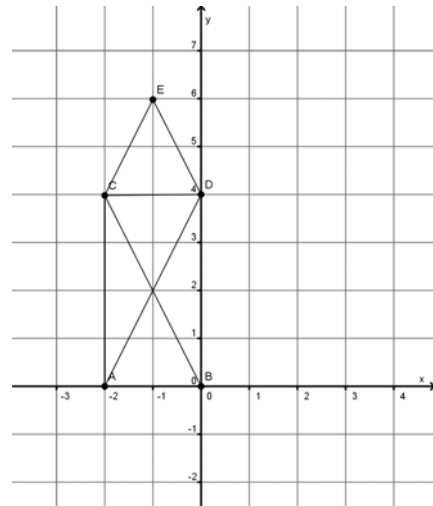
Station 9: Beratung im Elektrogeschäft

Die Anzeige des Tiefkühlschranks gibt die Höhe des Temperaturunterschieds zum Gefrierpunkt 0°C an. Eine richtige Formulierung des Verkäufers könnte lauten:

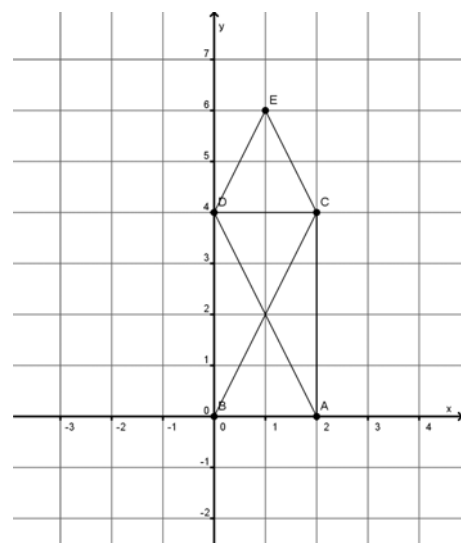
„Wenn jetzt die Temperatur im Schrank z.B. -18°C beträgt, schaltet er ein. Dann sinkt die Temperatur bis auf z.B. -26°C . Wenn -26°C erreicht sind, schaltet der Tiefkühlschrank ab. Dann steigt die Temperatur wieder bis auf -18°C . Und so geht das immer hin und her.“

Station 10: Punkte im Koordinatensystem

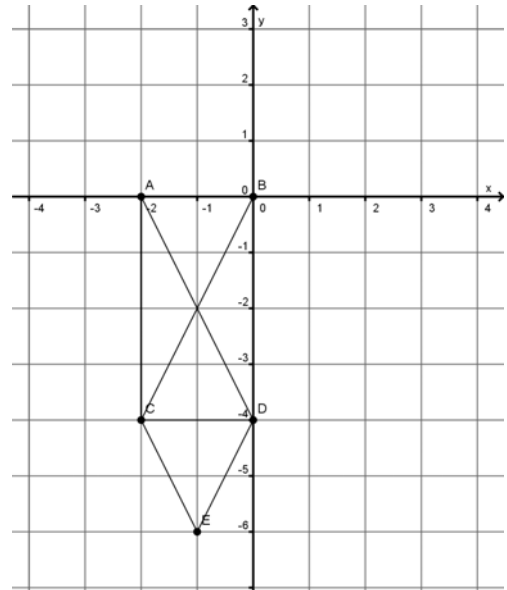
- a) $A(-2|0)$, $B(0|0)$, $C(-2|4)$, $D(0|4)$, $E(-1|6)$



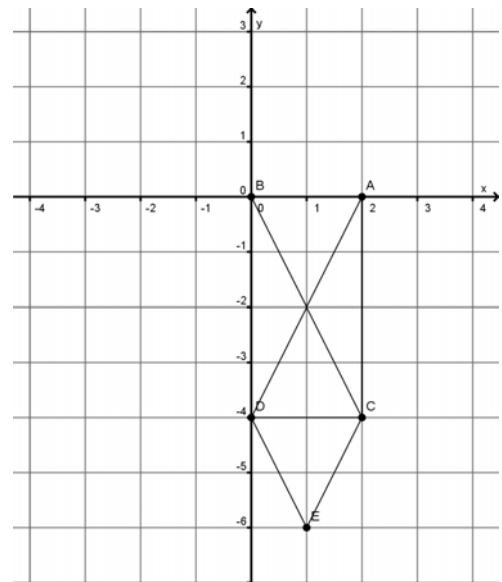
- b) $A(2|0)$, $B(0|0)$, $C(2|4)$, $D(0|4)$, $E(1|6)$ (Spiegelung von der Figur aus a) an der y-Achse)



- c) $A(-2|0)$, $B(0|0)$, $C(-2|-4)$, $D(0|-4)$, $E(-1|-6)$
(Spiegelung von Figur aus a) an der x-Achse)



- d) $A(2|0)$, $B(0|0)$, $C(2|-4)$, $D(0|-4)$, $E(1|-6)$ (Spiegelung von Figur aus a) am Ursprung)



Station 11: Achtung geheim!

Die Entschlüsselung ergibt das Wort FERIEN.

Station 12: Die gesuchte Zahl

- a) -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0, 1
- b) -51; 39
- c) 9; 10; 11; 12,...
- d) 0; 1; 2; 3
- e) 108
- f) ...; -11; -10; -9; 1; 2; 3; ...

Station 13: Bekannte Seen auf der Erde

See	Wasserspiegel	Seeboden	Seetiefe
Baikalsee	455 m ü. NN	1165 m u. NN	1620 m
See Genezareth	212 m u. NN	258 m u. NN	46 m
Kaspisches Meer	25 m u. NN	1023 m u. NN	998 m
Lake Superior	183 m ü. NN	214 m u. NN	397 m
Tanganjikasee	782 m ü. NN	688 m u. NN	1470 m

Ganze Zahlen - Kompetenzen

	Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)
Station 1	<p>K2: Probleme lösen AB I: einfache Probleme mit bekannten – auch experimentellen-Verfahren lösen</p> <p>K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I Routineverfahren verwenden</p>
Station 2	<p>K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute Darstellungen von mathematischen Objekten nutzen</p> <p>K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: Routineverfahren verwenden</p>
Station 3	<p>K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute Darstellungen von mathematischen Objekten nutzen</p>
Station 4	<p>K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen oder nutzen</p> <p>K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I Routineverfahren verwenden</p>
Station 5	<p>K2: Probleme lösen AB I: einfache Probleme mit bekannten – auch experimentellen-Verfahren lösen</p>
Station 6	<p>K2 Probleme mathematisch lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert <i>(für das Herausfinden aller Möglichkeiten)</i></p> <p>K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I Routineverfahren verwenden <i>(für das Rechnen der Aufgaben)</i></p> <p>K1 Mathematisch argumentieren ABII überschaubare mehrschrittige Argumentationen erläutern und entwickeln</p> <p>falls Terme benutzt werden: K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen</p> <p>AB II symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt</p>
Station 7	<p>K2: Probleme lösen AB I: einfache Probleme mit bekannten – auch experimentellen-Verfahren lösen</p> <p>K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I Routineverfahren verwenden</p>

Station 8	<p>Aufgabe 1) und Aufgabe 2) K4: Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen oder nutzen</p> <p>Aufgabe 3) und Aufgabe 4) K1: Mathematisch argumentieren AB II: Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern</p>
Station 9	<p>K6 Kommunizieren AB I: Aus kurzen, einfachen mathematikhaltigen Texten Informationen entnehmen</p> <p>K3 Modellieren AB I: einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen</p> <p>K1: Mathematisch argumentieren AB II: Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern oder: K1, AB I: mit Alltagswissen argumentieren, je nachdem auf welcher Ebene argumentiert wird; der Arbeitsauftrag lässt das offen</p>
Station 10	<p>K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute Darstellungen von mathematischen Objekten nutzen K1: Mathematisch argumentieren AB II: Lösungswege beschreiben und begründen</p>
Station 11	<p>K6 Kommunizieren AB II komplexe mathematikhaltige Texte, Grafiken und Abbildungen sinnentnehmend erfassen.</p>
Station 12	<p>K6 Kommunizieren AB I aus kurzen mathematikhaltigen Texten Informationen entnehmen</p> <p>K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB I vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen</p> <p>K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen</p>
Station 13	<p>K3: Mathematisch modellieren AB I: einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen</p> <p>K4: Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen oder nutzen</p> <p>K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I Routineverfahren verwenden</p>

Offene Aufgabe „Die Lieblingszahl 15“

Methodische Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler müssen in \mathbb{Z} addieren und subtrahieren können.

Diese Aufgabe kann ab der Orientierungsstufe als Übungsaufgabe gestellt werden. Jedoch ist der Anspruch für die Orientierungsstufe wesentlich höher. Die Aufgabe ist mehr für Einzelarbeit geeignet.

Ab der Klassenstufe 7 können Multiplikation und die Division hinzugenommen werden.

Beispiel für eine Lösungsmöglichkeit: $1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 15$

Variation der Aufgabe: Man lässt zu, dass die Reihenfolge der Ziffern geändert wird.

Mögliche Lösungen

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 = 15$$

$$1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9 = 15$$

...

Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)

a)

K2 „Probleme lösen“

AB II „Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert“

K5 „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“

AB I: Routineverfahren verwenden

b)

K1 „Argumentieren“

AB III: Komplexe Argumentationen erläutern oder entwickeln

K2 „Probleme lösen“

AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert

Bruchzahlen

*Verantwortlich für Aufgaben und Kommentare:
Lucie Kluge-Jungbluth, Michael Lamberty, Peter Staudt, Claudia Steiert*

Methodische Hinweise zum Lernzirkel

Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz:

Der Lernzirkel kann nach einer Einführung in die Bruchrechnung eingesetzt werden und setzt einfache Kenntnisse von Brüchen als Anteile und einfache Umrechnungen in Prozentsätze voraus. Rechenoperationen in größerem Umfang müssen nicht geleistet werden. Eine Auswahl der Aufgaben kann auch in höheren Klassenstufen zur Wiederholung eingesetzt werden, beispielsweise in Klasse 7 zu Beginn der Prozentrechnung.

Hinweise zur Struktur des Lernzirkels und zu Differenzierungsmöglichkeiten:

Die neun Pflichtstationen können innerhalb von zwei Unterrichtsstunden in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Anspruchsvollere Aufgaben sind als Wahlstationen ausgewiesen. Die fünf Wahlstationen sollen zur inneren Differenzierung für leistungsstärkere Schülerinnen und Schülern herangezogen werden. Rechenoperationen in kleinerem Umfang werden erwartet, ggf. wird in den methodischen Hinweisen zu den einzelnen Aufgaben darauf hingewiesen.

Hinweise zur Organisation der Selbstkontrolle durch die Schülerinnen und Schüler:

Ein Laufzettel mit Angabe aller Pflicht- und Wahlstationen ist enthalten.

Hinweise zur Verwendung von Hilfsmitteln:

Der Einsatz des Taschenrechners erscheint bei der Bearbeitung der Stationen nicht sinnvoll.

Methodische Hinweise zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

Station 1: Wie die Brüche als Anteile...

Bei Station 1 wird im Vergleich zur Wahlstation 10 lediglich die Angabe von Anteilen in Form von (gekürzten) Brüchen erwartet.

Station 2: Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

Zu b) Naheliegender wäre, die beiden Brüche auf Sechstel zu erweitern, dann liegt $\frac{3}{6}$ genau in der Mitte. Eventuell kommen Schülerinnen oder Schüler auch auf die Idee, die Bruchzahl mit der Maßzahl einer Einheit in Verbindung zu setzen. So sind $\frac{1}{3}$ von einer Stunde beispielsweise 20 Minuten und $\frac{2}{3}$ sind 40 Minuten. 30 Minuten läge dann in der Mitte, dies entspricht $\frac{1}{2}$. So könnte man auch thematisieren, dass alle Darstellungen von $\frac{1}{2}$ mögliche Lösungen sind.

Station 3: Die Ordnung der Brüche auf der Zahlengeraden

Anspruchsvoller wird die Aufgabenstellung, wenn man von den Schülerinnen und Schülern eine Begründung bei der Vorgehensweise einfordert.

Ziel ist nicht, den Hauptnenner von zwei Brüchen zu finden, sondern die angegebenen Brüche mit den bereits eingetragenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und 1 zu vergleichen und ein Gefühl dafür zu entwickeln, welche größer/kleiner als $\frac{1}{2}$ bzw. 1 sind. Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler sich noch einmal bewusst machen, dass es mehrere Brüche mit gleichem Wert gibt, die am gleichen Ort auf der Zahlengerade eingezeichnet werden.

Station 4: Wer ist größer?

An dieser Station können die Schülerinnen und Schüler noch einmal wiederholen, wie die Werte zweier Brüche miteinander verglichen werden.

Station 6: $\frac{1}{6}$ - jedes Mal in einer anderen Bedeutung

Um diese Station bearbeiten zu können, müssen Brüche mit einer natürlichen Zahl multipliziert bzw. durch eine natürliche Zahl dividiert werden.

Station 7: Verflixte Anteile

Die Teilaufgaben dieser Station sind gut lösbar mit der Idee Hilfslinien einzuzeichnen. Es gibt mehrere Möglichkeiten richtig zu argumentieren.

Bei Teilaufgabe a) und b) stimmen die Angaben nicht. Möglicherweise fällt es schwächeren Schülerinnen und Schülern leichter, erst einmal zu begründen, warum die Angaben nicht stimmen können und anschließend richtige zu benennen.

Station 8: Noch mehr verflixte Anteile

Schülerinnen und Schüler, welche die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken bereits kennen, können diese hier verwenden. Eine Lösung der Aufgabe kann aber auch ohne die Formel über die Bestimmung der Anteile erfolgen.

Station 9: Mit Brüchen wandern....

Bei Teilaufgabe d) können die Schülerinnen und Schüler je nach Kreativität bzw. individuellem Leistungsvermögen unterschiedliche Fragestellungen formulieren und durch Rechnung beantworten. Zwei mögliche Lösungen sind auf dem Lösungsblatt angegeben.

Station 10: Wie die Brüche mit den Prozentsätzen...

Jetzt sollen nicht Brüche, sondern im Alltag gängige Prozentsätze den Figuren aus Station 1 richtig zugeordnet werden. Da die Unterrichtseinheit Prozentrechnung im Lehrplan erst ab Klassenstufe 7 vorgesehen ist, darf das Wissen um die Darstellung von Anteilen in Form von Prozentsätzen bei Schülerinnen und Schülern nicht vorausgesetzt werden.

Bei Teilaufgabe b) ist die Fragestellung etwas offener. Sie kann in Abhängigkeit vom Alltagswissen der Schülerinnen und Schüler unterschiedlich gelöst werden.

Station 11: Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

Die Aufgabenstellung ist anspruchsvoller als die der Teilaufgaben a) und b) von Station 2.

Station 12: $\frac{1}{6}$ - jedes Mal in einer anderen Bedeutung.

Dieser Aufgabenteil ergänzt die Aufgabenteile a) und b) von Station 6.

Station 13: Jetzt springt das Dreieck ins Quadrat!

Es bedarf in erhöhtem Maße des Einzeichnens geeigneter Hilfslinien, die zu einer richtigen Argumentation wichtig sind.

Lösungen zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

Station 1: Wie die Brüche als Anteile....

Gib den gefärbten Anteil in den Figuren (1) – (4) als gekürzten Bruch an.

(1) Lösung: $\frac{1}{4}$ (2) Lösung: $\frac{1}{5}$ 3) Lösung: $\frac{1}{2}$ (4) Lösung: $\frac{2}{5}$

Station 2: Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

a) Eine mögliche Lösung: $\frac{5}{8}$

Auf der Zahlengeraden werden von Null aus nach rechts 8 Teilabschnitte gleicher Länge abgetragen. Die Länge der jeweiligen Teilabschnitte beträgt $\frac{1}{8}$. Der vierte Teilstrich entspricht $\frac{1}{2}$, der sechste $\frac{3}{4}$. Somit ist $\frac{5}{8}$ als fünfter Teilstrich die Mitte zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$.

Bei anderen möglichen Lösungen (z. B. $\frac{10}{16}$; $\frac{15}{24}$ usw.) ist eine andere Einteilung der Zahlengeraden erforderlich.

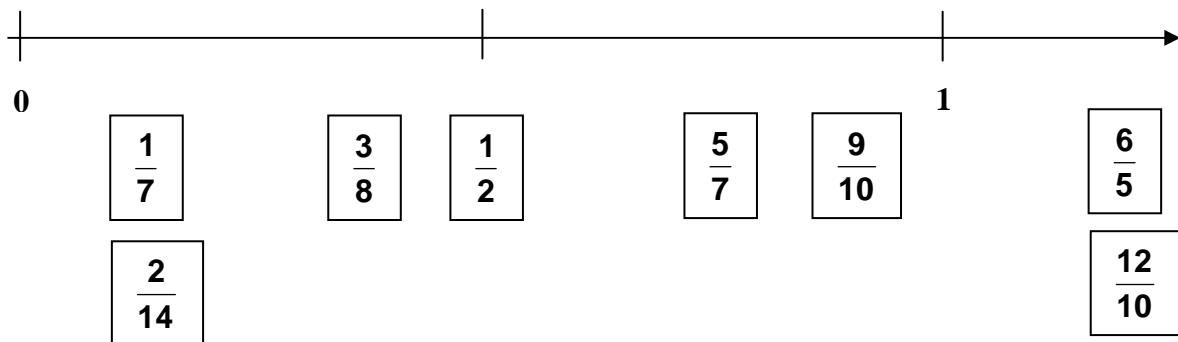
b) Eine mögliche Lösung: $\frac{3}{6}$

Entsprechend wie in a) werden auf der Zahlengeraden von Null aus nach rechts 6 Teilabschnitte gleicher Länge abgetragen. Die Länge der jeweiligen Teilabschnitte beträgt $\frac{1}{6}$.

Die zweite Markierung entspricht: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, die vierte Markierung: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und die dritte:

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Bei anderen möglichen Lösungen (z.B. $\frac{2}{4}$; $\frac{6}{12}$; $\frac{9}{18}$ usw.) ist eine andere Einteilung der Zahlengeraden erforderlich.

Station 3: Die Ordnung der Brüche auf der Zahlengeraden



Du kannst die Brüche auf den Hauptnenner 280 erweitern und die Zähler miteinander vergleichen.

Schneller geht es, wenn du die folgenden Eigenschaften beachtest:

1. Brüche mit gleichem Wert (und gleichem Ort auf der Zahlengerade):

$$\frac{2}{14} = \frac{1}{7} \quad \text{und} \quad \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

2. Zähler größer als Nenner $\Rightarrow \frac{6}{5} > 1$

3. Vergleich mit $\frac{1}{2}$:

a) Nenner ist größer als doppelter Zähler $\Rightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

b) Nenner ist kleiner als doppelter Zähler $\Rightarrow \frac{5}{7} > \frac{1}{2}$ und $\frac{9}{10} > \frac{1}{2}$

Station 4: Wer ist größer?

Die Brüche miteinander vergleichen ist einfach, wenn die Nenner gleich sind.

Vergleiche dann nur die Zähler,

$$\text{z.B. } \frac{3}{7} < \frac{4}{7}.$$

Sind die Zähler gleich, so ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer,

$$\text{z.B. } \frac{3}{10} > \frac{3}{11}.$$

Sind Zähler und Nenner verschieden, werden die Nenner (oder Zähler) gleichnamig gemacht (gleiche Unterteilung).

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} < \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

Station 5: Mit Bruchanteilen im Quadrat

Angenommen Q ist der Flächeninhalt des gesamten Quadratflächeninhalts. Dann ergibt sich aus den Beziehungen

$$A = Q : 4$$

$$B = A : 2$$

$$D = B : 2$$

$$C = A - D$$

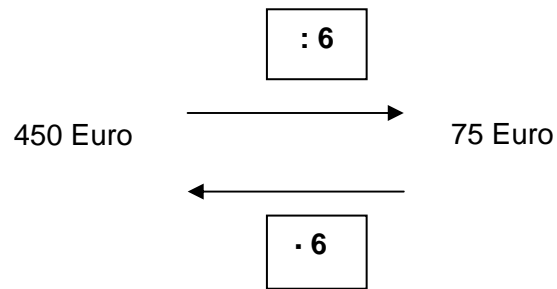
Teilfläche	A	B	C	D
Bruchteil	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Station 6: $\frac{1}{6}$ - jedes Mal in einer anderen Bedeutung

a) Der Bruch „Ein Sechstel“ beschreibt einen Anteil des Grundwertes.

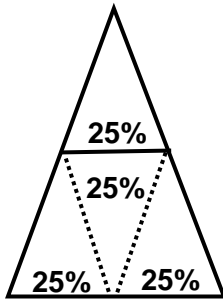
Es sind $\frac{1}{6} \cdot 1800 = 300$ Schülerinnen und/oder Schüler.

b) „Ein Sechstel“ beschreibt hier den Anteil des ursprünglichen Preises und wird mit 75 Euro angegeben.



Station 7: Verflixte Anteile

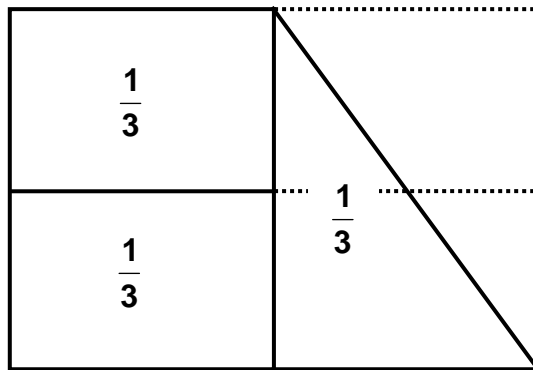
a)



Wenn man das obere Dreieck an der mittleren Linie spiegelt, fällt die Spitze auf die untere Trapezlinie. Das obere Dreieck passt offensichtlich mehrmals in das untere hinein und ist daher deutlich kleiner.

Die richtigen Anteile sind: $\frac{1}{4} = 25\%$ bzw. $\frac{3}{4} = 75\%$

b)



Nach Einzeichnen von Hilfslinien könnte die Figur so aussehen.

Mögliche Argumentation:

Jedes der kleinen Rechtecke hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck. Also besteht die gegebene Figur aus 3 gleichen Teilen, d.h. jeder hat den Anteil $\frac{1}{3}$.

c) Die Bruchteile sind richtig angegeben. Das erkennt man beispielsweise, wenn man die Flächeninhalte der eingezeichneten Rechteckflächen berechnet und miteinander vergleicht:
 $3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$ bzw. $6 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

Station 8: Noch mehr verflixte Anteile

Ohne die Anwendung der Formel zur Berechnung des Dreiecksflächeninhalts kann durch geschicktes Aufteilen des Rechtecks der Flächeninhalt der Teilflächen berechnet werden.

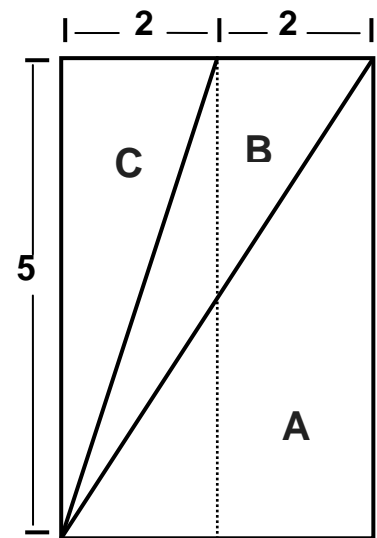
Angenommen Q bezeichne den gesamten Flächeninhalt des Rechtecks. Dann gilt:

$$C = \frac{1}{4} \cdot Q$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot Q - C = \frac{1}{4} \cdot Q$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot Q$$

Also $A > B = C$.



Station 9: Mit Brüchen wandern ...

a) Unter der Annahme verschiedener, realistischer Laufleistungen ergibt sich:

Laufleistung in km pro Stunde	3	4	5
Ungefähre Entfernung in km	4	5	6

b) Der Wanderer steht direkt vor den Hinweisschildern. Das Gasthaus Waldhäus'l liegt auf dem Weg nach Altendorf über Dorfbach-Klamm. Es ergibt sich die Zeitspanne:

$$\frac{3}{4}h - \frac{1}{4}h = \frac{1}{2}h.$$

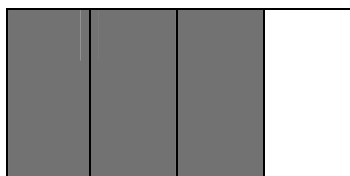
c) Nach den Angaben der Touristeninformation werden in 3 Stunden 12 km zurückgelegt, in der verbleibenden Viertelstunde noch zusätzlich 1 km. Danach beträgt die gesamte Wegstrecke (ungefähr) 13 km.

Lösungen zu den Wahlstationen:

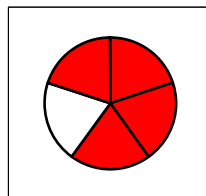
Station 10: Wie die Brüche mit den Prozenten ...

a) (1) Lösung: 25% (2) Lösung: 20% (3) Lösung: 50% (4) Lösung: 40%

b) Eine mögliche Lösung für 75%:



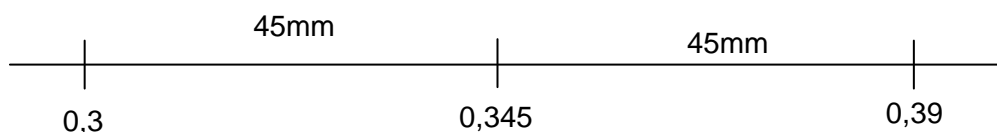
Eine mögliche Lösung für 80%:



Station 11: Mit Brüchen auf der Zahlengeraden

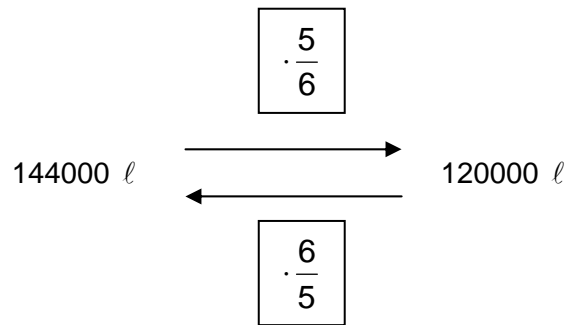
Eine geometrische Lösung:

Die Zahlengerade kann auf dem Abschnitt von 0,3 bis 0,39 als Strecke der Länge 9 cm dargestellt werden. Für die Mitte werden von links oder rechts 4,5 cm = 45 mm abgetragen. Dadurch ergibt sich als Mitte 0,345.



Bemerkung: Die Mitte lässt sich auch über die Formel $m = (a + b) : 2$ berechnen.

Station 12: $\frac{1}{6}$ – jedes Mal in einer anderen Bedeutung



Station 13: Jetzt springt das Dreieck ins Quadrat

Angenommen Q bezeichne den gesamten Flächeninhalt des Rechtecks.

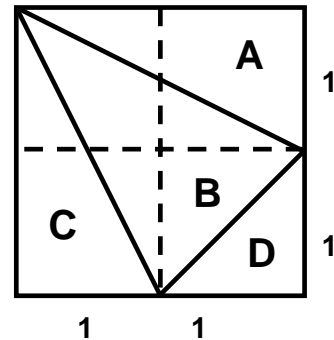
Durch Einzeichnen der Mittellinien erkennt man:

$$A = Q : 4 = \frac{1}{4} Q,$$

$$C = Q : 4 = \frac{1}{4} Q,$$

$$D = (Q : 4) : 2 = \frac{1}{8} Q$$

$$B = Q - (A + C + D) = Q - \left(\frac{1}{4} Q + \frac{1}{4} Q + \frac{1}{8} Q \right) = \frac{3}{8} Q$$



Wenn dir Formeln zur Berechnung von Flächeninhalten bekannt sind, kann eine algebraische Lösung so aussehen:

Die Quadratseite habe die Länge a. Dann ergibt sich: $A = C = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} a^2,$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{8} \cdot a^2 \text{ und } B = Q - (A + C + D) = a^2 - \left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{8} a^2 \right) = \frac{3}{8} a^2.$$

Station 14: In Bruchdorf ist 'was los.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{5} + \frac{7}{12} = \frac{19}{20} \qquad 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20} \neq \frac{1}{10}$$

Bruchzahlen - Kompetenzen

	Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)
Station 1	K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten anfertigen oder nutzen
Station 2	a) K2 Probleme lösen AB I: einfache Probleme mit bekannten Verfahren lösen K4 Mathematische Darstellungen verwenden AB II Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen und zwischen den Darstellungsformen wechseln oder: AB I: vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten anfertigen oder nutzen (hängt vom vorausgehenden Unterricht ab) b) K2 Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert K6 Kommunizieren AB II: Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse verständlich darstellen c) K2 Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert
Station 3	K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II: Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen
Station 4	K2 Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert
Station 5	K3: Mathematisch modellieren AB I: vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen AB II: Ergebnisse einer Modellierung interpretieren und an der Ausgangssituation prüfen
Station 6	K2: Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert K1: Argumentieren AB II: mehrschrittige Argumentationen entwickeln
Station 7	K2: Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert
Station 8	K2: Probleme lösen AB III: anspruchsvolle Probleme bearbeiten K1: Mathematisch argumentieren AB II: mehrschrittige Argumentationen entwickeln

Station 9	<p>a) K6: Kommunizieren AB I: aus kurzen mathemathikhaltigen Abbildungen Informationen entnehmen K3: Mathematisch modellieren AB I: einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen</p> <p>b) K6: Kommunizieren AB II: komplexe mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend erfassen</p> <p>c) K3 Mathematisch modellieren AB II: Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen</p> <p>d) K2 Probleme lösen AB II: Probleme selbst formulieren</p> <p>K3: Mathematisch modellieren vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen</p>
------------------	---

Offene Aufgabe „Paula gibt Rätsel auf“

Lösung

Eine mögliche Begründung:

Jeder bekommt zunächst 2 Tüten Gummibären. Die verbleibenden zwei Tüten werden gleichmäßig in 3 Teile geteilt. Also bekommt jeder $2\frac{2}{3}$ Tüten. Achim hat also $\frac{1}{3}$ Tüte an Paula abgegeben und Fritz $2\frac{1}{3}$ Tüten, also das 7-fache. Fritz stehen somit $\frac{7}{8}$ von 4 Euro und Achim $\frac{1}{8}$ von 4 Euro zu, das sind 3,50 Euro bzw. 0,50 Euro.

Eine andere mögliche Begründung:

Angenommen: Jede Tüte wird gleichmäßig in drei Teile geteilt. Dann entstehen 24 Einzelportionen, also 8 Einzelportionen für jeden der drei. Achim gibt also von seinen 3 Tüten (9 Einzelportionen) eine Einzelportion an Paula ab, während Fritz von seinen 5 Tüten (15 Einzelportionen) 7 Einzelportionen an Paula abgibt. Also stehen Achim $\frac{1}{8}$ und Fritz $\frac{7}{8}$ von den 4 Euro zu, das sind 0,50 Euro bzw. 3,50 Euro.

Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)

K2: Modellieren

AB III: komplexe oder unvertraute Situationen modellieren

AB III: verwendete mathematische Modelle reflektieren und kritisch beurteilen

K6: Kommunizieren

AB III: komplexe mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich präsentieren

Rationale Zahlen

*Verantwortlich für Aufgaben und Kommentare:
Armin Baeger, Franz-Josef Göbel, Helga Schmidt, Jana Zienicke*

Methodische Hinweise zum Lernzirkel

Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz:

- Benötigte Vorkenntnisse zur Bearbeitung des Lernzirkels:
Die Schülerinnen und Schüler können mit Rationalen Zahlen rechnen.
- Der Lernzirkel dient der Festigung des Themas „Rechnen mit Rationalen Zahlen“.
- Er kann ab Klassenstufe 7 eingesetzt werden.

Hinweise zur Struktur des Lernzirkels:

- Die Stationen können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Hinweise zu Differenzierungsmöglichkeiten:

- Die Differenzierung erfolgt einerseits durch Unterteilung in Pflicht- und Wahlstationen.

Pflicht- und Wahlstationen bestimmt die Lehrkraft entsprechend der Lerngruppe selbst (Ankreuzen auf dem Laufzettel)

Am Ende der Bearbeitungszeit von 90 Minuten sollen alle Schülerinnen und Schüler alle Pflichtstationen bearbeitet haben. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sollen darüber hinaus auch eine oder mehr Wahlstation(en) bearbeitet haben.

- Die Differenzierung erfolgt andererseits durch Wahlmöglichkeiten an den Stationen 1 bis 4 (leichtere oder anspruchsvollere Variante). Die Schülerinnen und Schüler erhalten an diesen Stationen beide Varianten auf einem Blatt. Aus dem Arbeitsauftrag geht klar hervor, dass sie eine der beiden Varianten wählen müssen.

Hinweise zur Organisation der Selbstkontrolle durch die Schülerinnen und Schüler:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten einen Laufzettel, auf dem sie markieren, welche Aufgaben sie bereits erledigt haben.
- Die Lösungsblätter zu den einzelnen Stationen werden in mehrfacher Ausführung an einer zentralen Stelle (z.B. Lehrerpult) aufbewahrt und den Schülerinnen und Schülern nach der Bearbeitung einzelner Stationen zur Selbstkontrolle zur Verfügung gestellt. Die Schülerinnen und Schüler halten auf ihrem Laufzettel die Anzahl der Fehler fest und korrigieren sie.

Methodische Hinweise zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

Stationen 1 bis 4

Die Schülerinnen und Schüler wählen eine der beiden Teilaufgaben.

Die Differenzierung erfolgt schon durch die Wahl der Aufgabe: Teilaufgabe a) ist jeweils einfacher, Teilaufgabe b) anspruchsvoller.

Station 5: Fragen formulieren

Diese Station sollte eine Pflichtstation sein.

Station 6: Zahlensuche

Diese Station könnte zur Wahl gestellt werden.

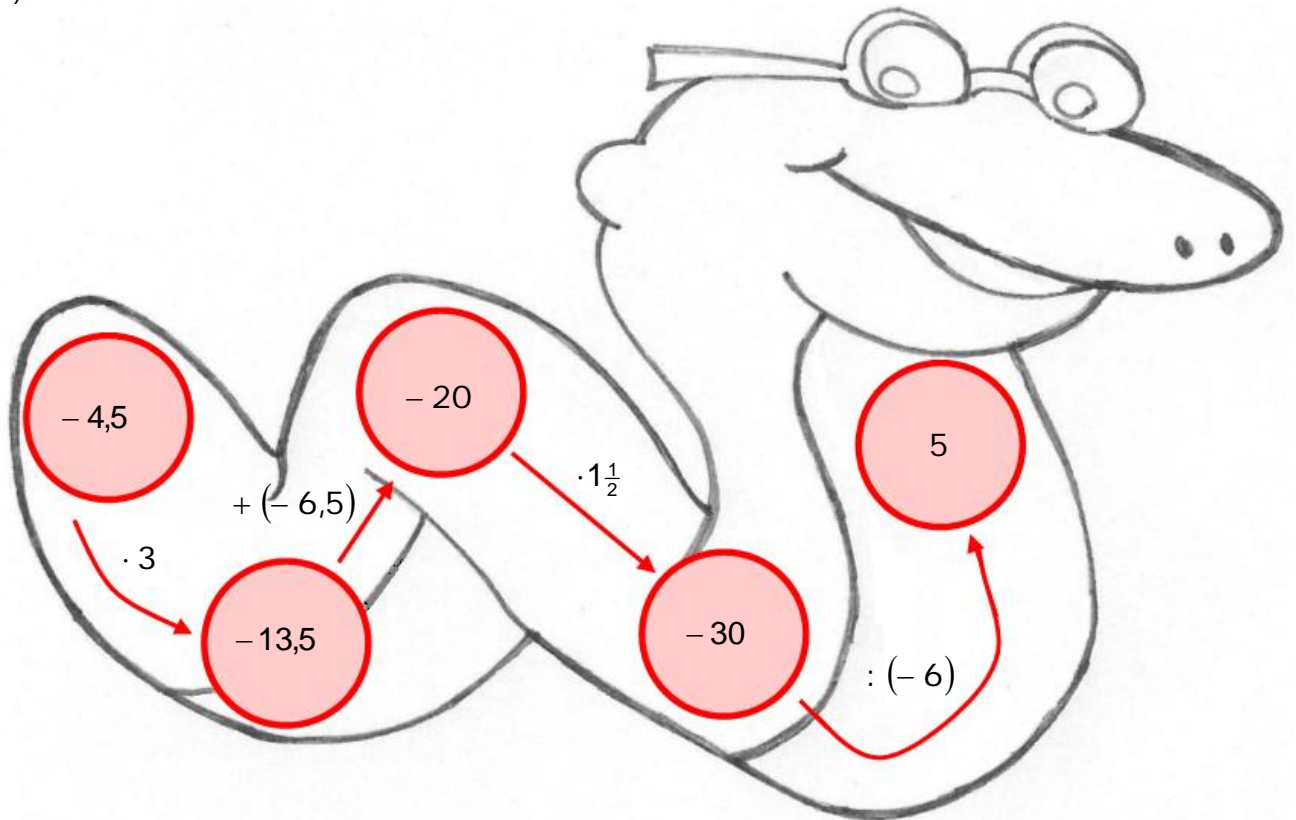
Die Schülerinnen und Schüler können dann selbst ihren Anspruch bestimmen.

(a leicht, b und c anspruchsvoller)

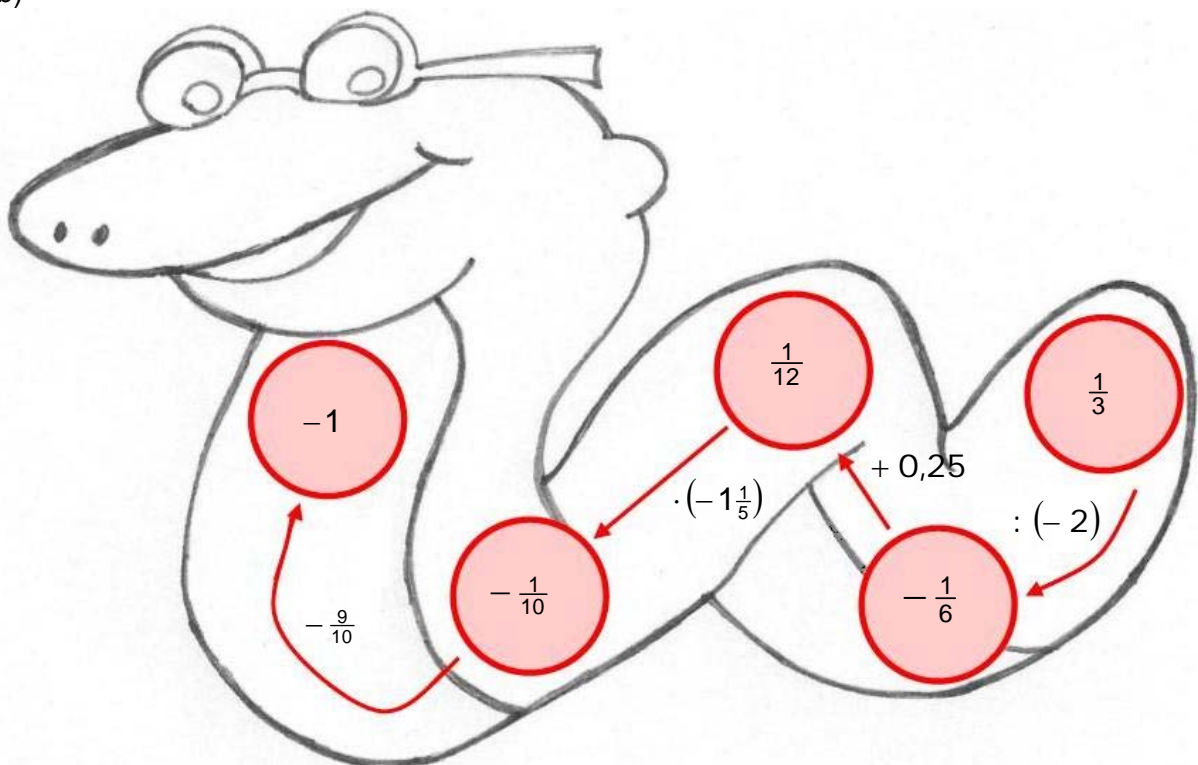
Lösungen zu den einzelnen Stationen des Lernzirkels

Station 1: Rechenschlange

a)

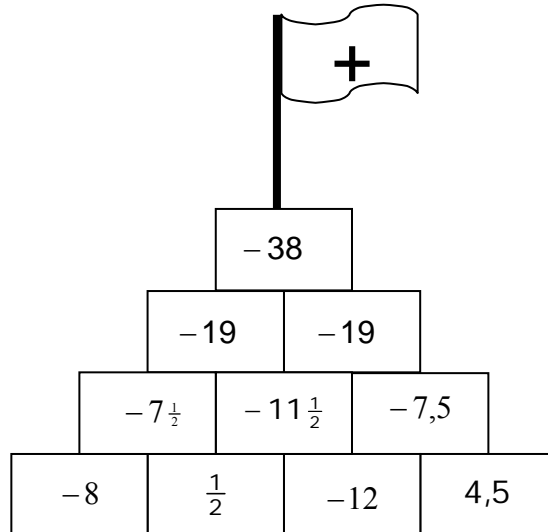


b)

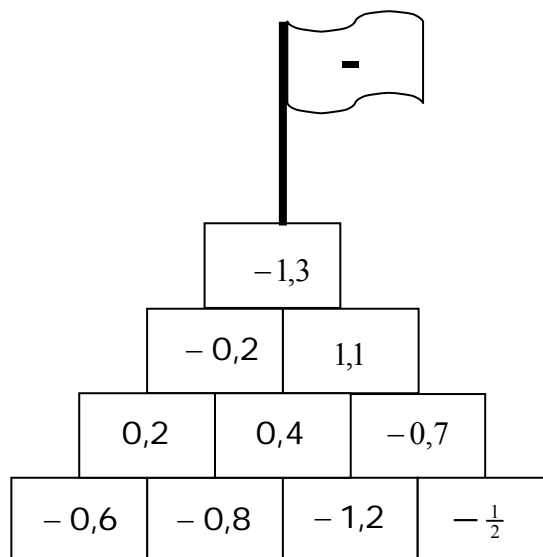


Station 2: Zahlenmauern

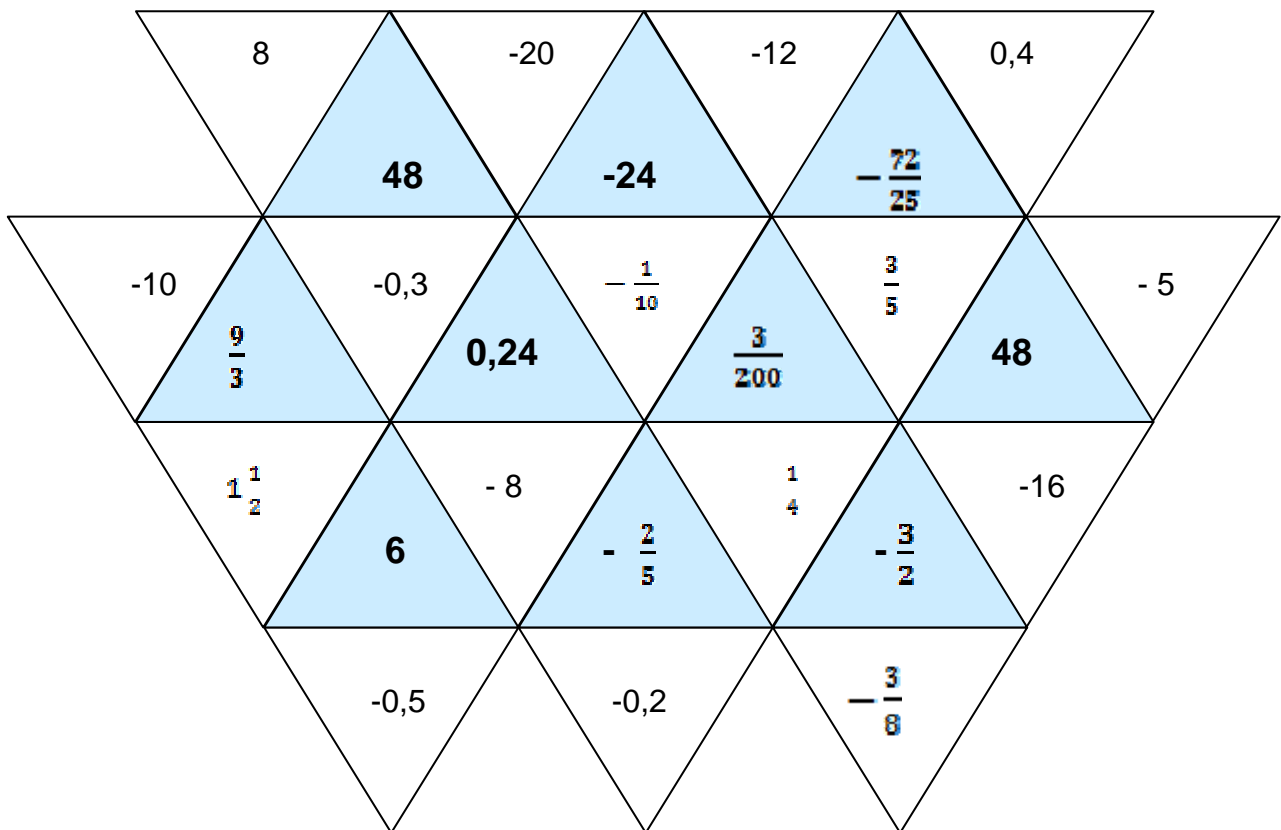
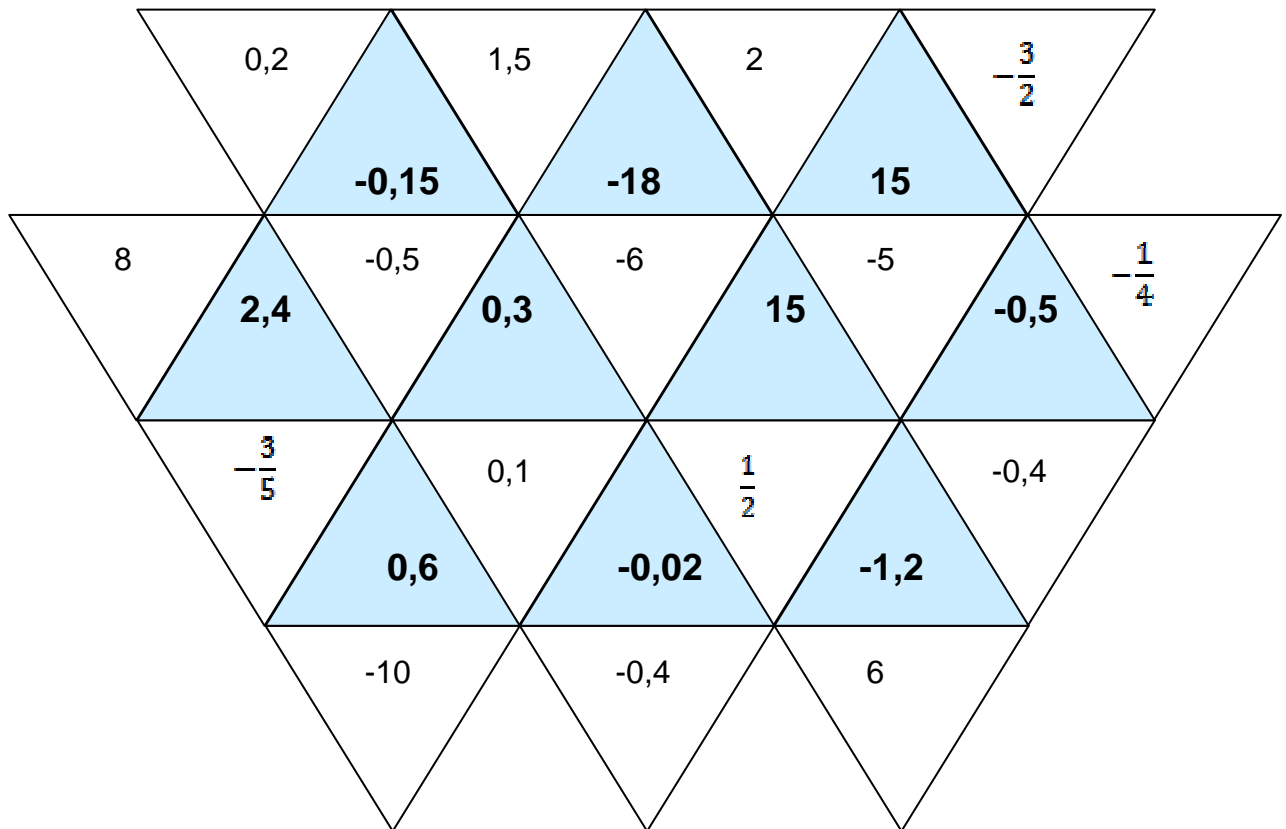
a)



b)

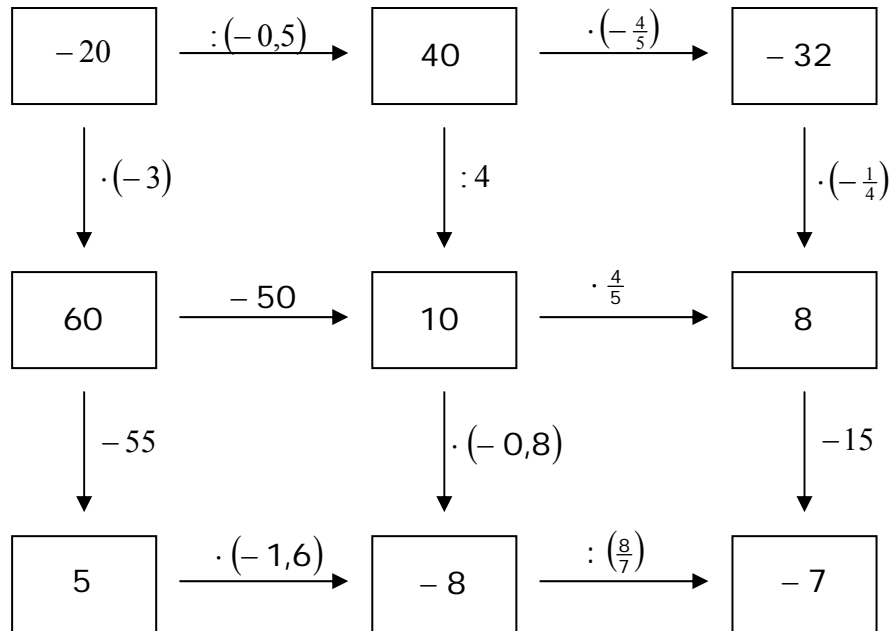


Station 3: Dreiecksteppich

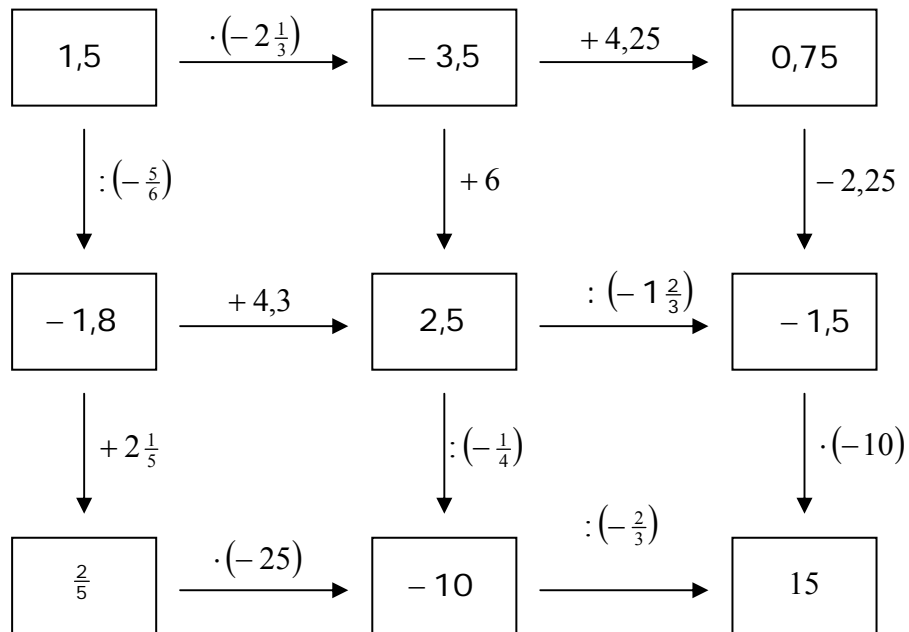


Station 4: Rechennetz

a)



b)



Station 5: Fragen formulieren

Ihr könnt aus den vorgegebenen Texten Aufgaben bilden und präsentieren.

Station 6: Zahlensuche

- a) Viele individuelle Lösungen sind möglich.
 z. B. $+678 + (-350) = +328$
- b) Um eine möglichst kleine Summe zu erhalten, müssen beide Summanden negativ sein.
 $-975 + (-864) = -1839$
- c) Um nahe an die Null zu kommen, muss der Betrag der Zahlen etwa gleich groß sein.
 z. B. $+501 + (-498) = 3$ oder $-501 + (+498) = -3$

Rationale Zahlen - Kompetenzen

	Kompetenzen (K) und Anforderungsbereiche (AB)
Station 1	K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: Routineverfahren verwenden
Station 2	K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II: Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen
Station 3	K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II: Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen
Station 4	K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB II: Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen
Station 5	K2: Probleme lösen Ab II: Probleme selbst formulieren K3: Mathematisch modellieren AB II: Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen
Station 6	K2: Probleme lösen AB II: Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert K1: Mathematisch argumentieren AB II: Lösungswege beschreiben und begründen Wenn der Taschenrechner erlaubt ist: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: mathematische Werkzeuge in Situationen nutzen, in denen ihr Einsatz geübt wurde sonst: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen AB I: Routineverfahren verwenden